高等学校教学用书

模糊数学及其应用

(第2版)

李安贵 张志宏
孟 艳 顾 春 编著

冶金工业出版社

ISBN 7-5024-3818-1
O·96(课)定价 22.00 元

销售分类建议：高等教材／数学

高等学校教学用书

模糊数学及其应用

（第2版）

李安贵　张志宏
孟　艳　顾　春　编著

北　京
冶 金 工 业 出 版 社
2005

内容提要

本书系统地讲述了模糊数学的基础内容和应用方法，共分13章。前6章着重介绍模糊数学的基本概念和理论；后7章主要介绍模糊数学的一些应用方法。每章后面都配有习题，书后附有答案。本书适宜作为大专院校工科、财经类和管理类高年级大学生及硕士研究生的教科书，也适合科技工作者自学和参考。

图书在版编目（CIP）数据

模糊数学及其应用/李安贵等编著. —2版. —北京：冶金工业出版社，2005.8

ISBN 7-5024-3818-1

Ⅰ.模… Ⅱ.李… Ⅲ.模糊数学 Ⅳ.O159

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第093999号

出版人 曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷39号，邮编100009）

责任编辑 王秋芬 美术编辑 李 心

责任校对 王贺兰 李文彦 责任印制 牛晓波

北京百善印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

1994年6月第1版，2005年8月第2版，2005年8月第3次印刷

850mm×1168mm 1/32；12.625印张；340千字；391页；2801-5800册

22.00元

冶金工业出版社发行部 电话：(010)64044283 传真：(010)64027893

冶金书店 地址：北京东四西大街46号(100711) 电话：(010)65289081

第2版前言

本书是在第1版的基础上，根据多年的教学实践，并按照目前的教学要求，进行全面修订而成的. 在修订过程中，保留了原教材的系统、风格和特点，同时也注意吸收当前同类教材的一些优点及本学科的前沿成果，使新版成为既适合时代的要求又继承传统优点的教材.

新版教材主要做了以下工作：

(1) 调整了第1、3、8、11章的内容，使内容衔接更加自然，结构更加合理；

(2) 第2、5、6、9章增加了部分内容，使内容更加丰富；

(3) 重写了第12章模糊控制，增编了第13章模糊概率；

(4) 所涉及到的一些经典数学的内容，作为附录放在书后，以便读者查阅.

张志宏修订了第5章、第8章和第9章；孟艳修订了第7章，重写了第12章；顾春编写了第13章；李安贵完成其余章节的修订工作，并统一成稿.

硕士研究生柳美、张彬、王福山也参加了本书的修订工作.

本书的编写得到北京科技大学研究生院、教务处、教材科和数力系的热情支持和帮助，谨此致谢！

新版中存在的问题，欢迎读者批评指正.

编　者

2005年7月

第1版前言

模糊数学是近30年来发展起来的一门新兴学科，它以其崭新的理论和独特的方法，冲破了精确数学的局限性，巧妙地处理了客观世界中存在着的模糊性现象，在自然科学和社会科学的许多领域取得了令人瞩目的成果，显示出强大的生命力和渗透力.

本书是编者在多年教学实践和科学研究的基础上，参考了国内外多种模糊数学的著作和有关文献写成的，在编写时注意了下列方面：

（一）系统地介绍模糊数学的基本内容和应用方法，力求做到理论紧密联系实际，使读者通过对本书的学习，能够打下较为牢固的模糊数学基础，学会应用模糊数学的理论和方法分析和解决实际问题．书中不涉及抽象难懂的纯理论内容，只要具备高等数学和工程数学的一般基础，就能读懂全书.

（二）叙述循序渐进，深入浅出，理论推导力求严谨，方法的说明尽可能详尽，便于读者自学.

（三）除基本概念、基本理论和基本方法的介绍以外，还适当配有习题，书后附有答案，以便读者检查学习效果.

全书共分十二章，前六章着重介绍模糊数学的基本概念和基础理论，后六章着重介绍模糊数学的应用方法.

段凤英编写第一章第一节和第十一章，并写了绪论；张志宏编写第九章，并为各章配备了习题，给出了答案；其余章节由李安贵编写并统一成稿.

北京师范大学罗承忠教授和北京科技大学刘钦圣教授曾审阅本书初稿，并提出许多宝贵意见，在此谨向他们表示衷

心感谢.

根据我们的实践，40学时可讲授除第四、五、十、十二章以外的内容，70学时可讲完全部内容，教师在讲授时可根据学时和专业培养要求灵活掌握.

本书可作为大专院校工科、财经和管理类高年级大学生及研究生的教科书，也适合于广大科技工作者自学和参考.

由于我们水平有限，书中难免出现疏漏或错误之处，恳请读者批评指正.

作者谨识

1993年4月于北京

符 号 表

符号	含义
U, V, X	论域
$\triangleq$	右边定义左边
$\underset{\sim}{A}^c$	$\underset{\sim}{A}$ 的余集
$\vee$	取大，或
$\wedge$	取小，且
$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}$	模糊集
$\underset{\sim}{A}(u), \underset{\sim}{B}(u)$	$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$ 的隶属函数
$\mathscr{F}(U)$	U 的模糊幂集
$\wedge^*$、$\vee^*$	模糊算子
$\hat{+}$、$\hat{\wedge}$	模率算子
$\oplus$、$\ominus$	有界算子
$\dot{\varepsilon}$、$\dot{\varepsilon}$	Einstein 算子
$\dot{r}$、$\dot{r}$	Hamacher 算子
$\underset{v}{\curlywedge}$、$\underset{v}{Y}$	Yager 算子
$\perp_p$、$\top_p$	Schweizer-Sklard 算子
A_λ	$\underset{\sim}{A}$ 的 λ-截集
$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$	$\underset{\sim}{A}$ 的 λ-强截集
Ker $\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$ 的核
Supp $\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$ 的支撑集
hgt $\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$ 的高
dph $\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$ 的深度
$\lvert\underset{\sim}{A}\rvert$	$\underset{\sim}{A}$ 的基数
$\lVert\underset{\sim}{A}\rVert$	$\underset{\sim}{A}$ 的相对基数
$E(\underset{\sim}{A})$	$\underset{\sim}{A}$ 的均值
$D(\underset{\sim}{A})$	$\underset{\sim}{A}$ 的方差
$d(\underset{\sim}{A})$	$\underset{\sim}{A}$ 的模糊度
$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的内积
$\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B}$	$\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的外积

符号	含义
$\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{S}$	模糊关系
$r(R)$	R 的自反闭包
$s(R)$	R 的对称闭包
$t(R)$	R 的传递闭包
$\mathscr{M}_{m\times n}$	$m\times n$ 模糊矩
$\hat{X}$	关系方程的最大解
$\underset{\vee}{X}$	关系方程的极小解
$\mathscr{T}$	钻井有效探测
$\underset{\sim}{R}_U$	$\underset{\sim}{R}$ 在 U 中的投影
$\underset{\sim}{R}\vert_u$	$\underset{\sim}{R}$ 在 u 处的截影
$\underset{\sim}{f}: U \to \mathscr{F}(V)$	模糊映射
$\underset{\sim}{T}: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$	模糊变换
$\underset{\sim}{I} * \underset{\sim}{J}$	二元模糊运算
$\underset{\sim}{4}$	模糊正整数 4
$t(\alpha,\sigma)$	三角模糊数
x^*	模糊最优解
$\underset{\sim}{\leqslant}$	近似小于等于
$\hat{=}_0$	非常非常小的数
$P(\underset{\sim}{A})$	模糊集的普通概率
$\underset{\sim}{P}(A)$	普通集的模糊概率
$\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{A})$	模糊集的模糊概率
$\underset{\sim}{F}(x)$	模糊概率随机变量的分布函数
$\underset{\sim}{E}(\xi)$	模糊概率随机变量的数学期望
$\underset{\sim}{D}(\xi)$	模糊概率随机变量的方差

目　录

引　言 …… 1

第 1 章　模糊集合的基本概念 …… 3

1.1　模糊集合及其表示方法 …… 3
1.2　模糊集的运算及其性质 …… 11
1.3　模糊集的截集 …… 19
1.4　分解定理与表现定理 …… 24
习题 1 …… 29

第 2 章　模糊集的数量指标 …… 31

2.1　模糊集的高、深度及基数 …… 31
2.2　模糊集的均值与方差 …… 34
2.3　模糊度 …… 36
2.4　两模糊集的距离 …… 40
2.5　两模糊集的贴近度 …… 44
习题 2 …… 47

第 3 章　模糊关系 …… 49

3.1　模糊关系的概念 …… 49
3.2　模糊矩阵 …… 54
3.3　模糊等价矩阵与模糊相似矩阵 …… 62
3.4　模糊图 …… 70
习题 3 …… 75

第 4 章　模糊关系方程 …… 78

4.1　模糊关系方程 …… 78

4.2　模糊矩阵方程的一般解法…………………………………… 80
4.3　解模糊矩阵方程的表格法…………………………………… 86
4.4　可转化为模糊关系方程的方程……………………………… 95
习题4 ………………………………………………………………… 99

第5章　模糊映射与模糊变换……………………………………… 101

5.1　模糊关系的投影与截影 …………………………………… 101
5.2　模糊映射与模糊变换 ……………………………………… 102
5.3　扩张原理 …………………………………………………… 106
5.4　模糊数 ……………………………………………………… 113
习题5 ………………………………………………………………… 122

第6章　确定隶属函数的方法……………………………………… 125

6.1　确定隶属函数的原则 ……………………………………… 125
6.2　Delphi 法 …………………………………………………… 127
6.3　模糊统计法 ………………………………………………… 129
6.4　增量法 ……………………………………………………… 143
6.5　因素加权综合法 …………………………………………… 144
习题6 ………………………………………………………………… 146

第7章　模糊聚类分析……………………………………………… 148

7.1　模糊聚类分析及其步骤 …………………………………… 148
7.2　基于模糊等价关系的传递闭包法 ………………………… 153
7.3　基于模糊相似关系的直接聚类法 ………………………… 157
7.4　基于模糊 c-划分的模糊聚类法 ………………………… 159
习题7 ………………………………………………………………… 171

第8章　模糊模式识别……………………………………………… 174

8.1　模式识别概述 ……………………………………………… 174
8.2　模糊模式识别 ……………………………………………… 175

8.3　多元模糊模式识别 ………………………………………… 178
8.4　模糊模式识别应用举例 ……………………………………… 181
习题 8 ……………………………………………………………… 187

第 9 章　模糊规划……………………………………………… 189

9.1　模糊极值 …………………………………………………… 189
9.2　模糊规划 …………………………………………………… 193
9.3　模糊线性规划 ……………………………………………… 199
9.4　多目标线性规划 …………………………………………… 207
9.5　有模糊系数的线性规划 …………………………………… 211
习题 9 ……………………………………………………………… 217

第 10 章　模糊预测 ………………………………………… 220

10.1　预测及其程序……………………………………………… 220
10.2　基于因果聚类的模糊预测………………………………… 221
10.3　模糊时间序列预测法……………………………………… 225
10.4　预测问题举例……………………………………………… 231
习题 10 …………………………………………………………… 234

第 11 章　模糊决策 ………………………………………… 237

11.1　决策及其过程……………………………………………… 237
11.2　模糊群体决策……………………………………………… 239
11.3　模糊相对决策……………………………………………… 244
11.4　模糊综合决策……………………………………………… 251
11.5　模糊二阶决策……………………………………………… 260
习题 11 …………………………………………………………… 264

第 12 章　模糊控制 ………………………………………… 267

12.1　模糊语言的集合描述……………………………………… 267
12.2　模糊逻辑与模糊推理句…………………………………… 276

12.3 似然推理与条件语句…………………………………… 284
12.4 模糊控制的基本原理…………………………………… 289
12.5 模糊控制器的设计…………………………………… 297
12.6 自组织模糊控制器简介…………………………………… 312
12.7 模糊控制应用实例…………………………………… 315
习题12 …………………………………… 325

第13章 模糊概率 …………………………………… 328

13.1 模糊事件的普通概率…………………………………… 328
13.2 普通事件的模糊概率…………………………………… 334
13.3 模糊事件的模糊概率…………………………………… 343
习题13 …………………………………… 344

附录 预备知识…………………………………… 346

习题答案…………………………………… 378

名词索引…………………………………… 387

参考文献…………………………………… 390

引 言

当我们初次接触到"模糊数学"这一名词时，可能会感到新奇，甚至迷惑不解．数学，从来都是与精确联系在一起的，怎么会有"模糊"的数学呢？模糊数学是一门什么样的学科，它的研究对象是什么，研究问题和解决问题的方法又是什么呢？

"模糊"一词来自英文 Fuzzy，意思是"模糊的"、"(形状或轮廓）不清楚"等等．模糊数学是运用数学方法研究和处理带有模糊性现象的一门新兴学科，它的创始人是美国加利福尼亚大学著名的控制论专家扎德（L. A. Zadeh）教授．

什么是模糊性现象呢？所谓的模糊性，是指事物的亦此亦彼性，反映在概念形成过程中外延的不分明性．比如"健康"、我们很难将一群人硬性地划分成"健康人"与"不健康人"两部分，这就是模糊性现象．模糊性现象的本质在人们头脑中的反映，就形成了模糊性概念．在日常生活和工作中，存在着大量的模糊性现象，我们经常运用模糊性概念来处理这类问题．比如，学生要找一位老师，知道这个老师是个高个子，戴宽边眼镜，南方口音．这里的"高个子"、"戴宽边眼镜"、"南方口音"，都是模糊性概念．因为身高多少厘米算得上"高个子"？眼镜框多少毫米宽称为"宽边"？怎样的发音吐字可谓"南方口音"？这些很难用数学语言表述．但是，如果对这个单位的老师比较熟悉，就可以凭借这些模糊信息，通过对以往大脑中储存的各种信息比较、判断、推理，确定要找的那位老师．在这里，大脑实际上进行了模糊判断和推理．

人脑不仅有模糊判断的功能，而且还有模糊控制的能力．比如我们要把放在桌子上的一个鸡蛋拿起来，究竟用多大的力就能拿起来又不会把它捏碎呢？我们不需要对力进行精确的计算，只

需通过视觉、触觉等感觉，经过几次信息反馈和力的调整，就能顺利完成. 诸如此类的例子不胜枚举. 这表明大脑既像一台数字计算机，又像一台模拟计算机；既能处理各种精确的信息，也能处理各种模糊信息. 而在处理模糊信息方面，人脑往往有独到之处，常常是计算机无法比拟的.

在日常生活中，我们还大量使用模糊性语言. 在谈论天气时，常讲"晴朗"、"闷热"、"风力不大"等；描述一个人时，常说"长得漂亮"、"待人和蔼"；评价某人的工作时，往往用"治学严谨"、"工作认真"等语. 正如难以准确表述一个人的五官形状和相对位置、肤色、身材、气质等怎样搭配才可称得上"漂亮"一样，很多问题是很难给出确切的、统一的标准的，然面我们却能够理解其中含义. 这说明我们已经习惯使用模糊性语言描述事物、表达个人情感，用模糊的方法认知事物，从面得出清晰、明确的结论.

概括地说，模糊数学就是把客观世界中的模糊性现象作为研究对象，从中找出数量规像，然后用精确的数学方法来处理的一门新的数学分支. 它为我们研究那些复杂的、难以用精确数学描述的问题，提供了一种简捷而有效的方法。

至此，我们已经了解到，在客观世界中，人们所遇到的事物从量上划分可分为两大类，即确定性的量和不确定性的量；不确定性的量又可分为随机性和模糊性两种. 我们研究这些量所采用的方法是不同的，对于确定性的量，我们运用经典数学；对于随机性的不确定的量，运用概率论；而对模糊性的不确定的量，则运用模糊数学. 这后一种量，正是本书介绍的内容.

第 1 章　模糊集合的基本概念

模糊数学是研究模糊现象的数学，而模糊集合是模糊数学的理论基础. 本章介绍模糊集合的一些基本概念，包括模糊集合的定义、运算、性质以及它与普通集合的联系.

1.1　模糊集合及其表示方法

1.1.1　模糊集的概念

众所周知，每一个概念都有一定的内涵和外延，它们是描述概念的两个方面. 所谓外延，是指概念反映的那一类对象，而内涵是指概念反映的客观对象的本质. 比如"矿石"这一概念，其内涵就是凡矿石所共有而非矿石便不具有的特性，面外延就是世界上的矿石. 用集合的观点来看，一个概念的内涵就是集合的定义，外延则是组成该集合的所有元素. 这表明集合可以描述概念. 例如，集合{1，2，3，…}描述了"自然数"这一概念；{氦，氖，氩，氪，氙，氡}描述了"惰性气体"这一概念. 然而，如果我们对周围的一切细加考察的话，就不难发现，普通集还不能描述所有的概念. 像"天气好"、"个子高"、"美丽"这样一类经常遇到的模糊概念，就无法用普通集合来表达. 因为普通集合描述的概念有这样的特点：一对象要么符合该概念，要么不符合该概念，二者必居且仅居其一，没有模棱两可的情况. 而对于模糊概念来说，一对象是否符合它，不能简单地用"是"或"否"来回答，因为对象既不完全符合，也不完全不符合，面是在某种程度上符合该概念. 在这里，符合与不符合没有一个明确的分界线，不具非此即彼性，所以无法用普通集合来描述. 正像我们在绪论中指出的那样，模糊现象大量存在于客观世界

中，是无法回避的．因此，将普通集合加以推广，使之能够表达模糊概念，以解决具有模糊性现象的实际问题，就是十分必要的了．

那么该如何对普通集合进行推广呢？

在普通集合中，我们曾介绍如何用特征函数 $A(u)$ 来表示集合 A. $A(u)=1$ 表明元素 u 属于集合 A，而 $A(u)=0$ 则表明元素 u 不属于集合 A，在这里，特征函数值只取 0 和 1 两个值就已足够．换言之，普通集合 A 可用由它到集合 $\{0, 1\}$ 上的映射 $A(u)$ 来描述．由此可得到启示：如果我们不再用它二值逻辑的规定，把特征函数值的范围从集合 $\{0, 1\}$ 扩充到在区间 $[0, 1]$ 上连续取值，那么一对象符合某概念的程度，就可以用区间 $[0, 1]$ 内的数来表示了，对象所对应的数值愈靠近 1，表示该对象符合概念的程度愈大，反之愈小．这样一来，普通集 A 就相应地扩充为一个带有不分明边界的模糊集了，从而模糊概念也就可用这样的模糊集来表达了．

基于上述想法，下面给出模糊集的定义．

定义 1-1　设在论域 U 上给定了映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1] \quad u \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$

则称 μ 确定了 U 上的一个模糊子集，记为 $\underset{\sim}{A}$（在 A 下加"～"以区别于普通集 A）．μ 称为模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数，记 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 以强调是 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数，$\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 在 $u \in U$ 点处的值 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 称为 u 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，它表示 u 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度或"资格"．为方便起见，通常将模糊子集简称为模糊集，且把 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 与 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 均简记为 $\underset{\sim}{A}(u)$.

在一般性的讨论中，我们常将模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数 $\underset{\sim}{A}(u)$ 的图形，画成图 1-1 的曲线形状．

模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 完全由其隶属函数所描述，即只要给定隶属函数 $\underset{\sim}{A}(u)$，那么模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 也就完全确定了，不同的隶属函数确定

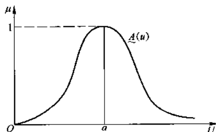


图 1-1 隶属函数曲线

着不同的模糊集. 同一个论域 U 上可以有多个模糊集.

对 $\forall u \in U$ 及 U 上的模糊集, 一般不能说 u 是否隶属于 $\underset{\sim}{A}$, 只能说 u 在多大程度上隶属于 $\underset{\sim}{A}$, 这正是模糊集与普通集的本质区别.

特别地, 当 $\underset{\sim}{A}(u)$ 的值只取 $[0, 1]$ 的两个端点 (即 0, 1 两个值) 时, 隶属函数便退化为特征函数, 模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 就退化为一个普通集了. 这表明普通子集是模糊子集的特殊形态. 此外, 若 $\forall u \in U, \underset{\sim}{A}(u) = 0$, 则 $\underset{\sim}{A}$ 称为空集 $\varnothing$; 若 $\forall u \in U, \underset{\sim}{A}(u) = 1$, 则 $\underset{\sim}{A}$ 称为全集 U.

例 1-1 如图 1-2, 设 $U = \{a, b, c, d, e\}$, 令 $a \mapsto 1, b \mapsto 0.9, c \mapsto 0.4, d \mapsto 0.2, e \mapsto 0$, 这是 U 到 $[0, 1]$ 的一个映射, 记为

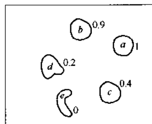


图 1-2 U 上的"圆块块"模糊集

$\underset{\sim}{A}(u)$,问 $\underset{\sim}{A}(u)$ 是否确定一模糊集.

解 根据定义 1-1，$\underset{\sim}{A}(u)$ 确定 U 上的一个模糊集 $\underset{\sim}{A}$，它是"圆块块"这一模糊概念在 U 上的表现.

例 1-2 讨论实数集 X 上的映射

$$\underset{\sim}{A}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{1 + 100/(x-1)^2} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

所确定的模糊集 $\underset{\sim}{A}$.

解 (1) 当 $x \leqslant 1$ 时，$\underset{\sim}{A}(x) = 0$，表明不大于 1 的数与 $\underset{\sim}{A}$ 无隶属关系，也即与 $\underset{\sim}{A}$ 有隶属关系的数都是大于 1 的数；

(2) 当 $x = 11$ 时，$\underset{\sim}{A}(11) = 0.5$，即 $x = 11$ 隶属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度为 0.5；

(3) 当 $x = 101$ 时，$\underset{\sim}{A}(101) = 0.99$，即 $x = 101$ 以程度 0.99 隶属于 $\underset{\sim}{A}$.

很明显，x 比 1 大得越多，隶属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度就越大，当 $x \gg 1$ 时，$\underset{\sim}{A}(x)$ 就充分接近于 1，这表明模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 描述的是"所有比 1 大得多的实数"这一模糊概念.

$\underset{\sim}{A}(x)$ 的图像如图 1-3 所示.

例 1-3 以年龄作论域，取 $U = [0,200]$，于是年老 $\underset{\sim}{O}$ 与

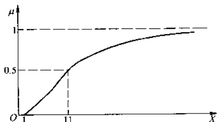


图 1-3 "比 1 大得多的实数"的隶属曲线

年轻 $\underset{\sim}{Y}$ 是两个模糊集，Zadeh 给出它们的隶属函数分别为

$$\underset{\sim}{Q}(u)=\begin{cases}0 & , \quad 0 \leqslant u \leqslant 50 \\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & , \quad 50<u \leqslant 200\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{Y}(u)=\begin{cases}1 & , \quad 0 \leqslant u \leqslant 25 \\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & , \quad 25<u \leqslant 200\end{cases}$$

见图 1-4. 问年龄分别为 55 岁、20 岁、40 岁的人是年轻还是年老.

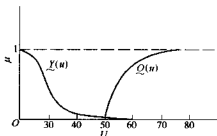


图 1-4 “年轻”与“年老”的隶属函数曲线

解 由计算得 $\underset{\sim}{Q}(55)=0.5$，$\underset{\sim}{Y}(20)=1$，这表明 55 岁的人只能算“半老”，因他们属于“年老”集的资格只有 0.5，20 岁的人绝对是年轻人，因他们属“年轻”集的资格是 1；而 $\underset{\sim}{Q}(40)=0$，$\underset{\sim}{Y}(40)=0.1$，这表明 40 岁的人不属于“年老人”，还偏年轻.

需要指出的是，隶属函数是模糊集合论赖以建立的基石. 如何建立隶属函数，有专门的方法，是模糊数学中的重要内容，第 6 章将详细介绍.

下面给出模糊幂集的概念.

定义 1-2 设 U 为给定的论域，U 上的模糊子集的全体称为

模糊幂集，记为 $\mathscr{F}(U)$，即

$$\mathscr{F}(U)=\{\underset{\sim}{A}\mid \underset{\sim}{A}(u): U\to[0,1]\}$$

因为任何一个普通子集都是特殊的模糊子集，故显然有

$$\mathscr{P}(U)\subseteq\mathscr{F}(U)$$

由于每一个普通集和每一个模糊集与 $\mathscr{F}(U)$ 的关系都是 $\in$ 或 $\notin$ 的关系，故 $\mathscr{F}(U)$ 也是一普通集合.

1.1.2 模糊集的表示方法

1.1.2.1 U 为有限集

设有限集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，则模糊集通常采用如下四种表示方法：

（1）Zadeh 表示法

$$\underset{\sim}{A}=\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1}+\frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2}+\cdots+\frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}$$

其中 $\underset{\sim}{A}(u_i)/u_i$ 不表示分数，而是 U 中的元素 u_i 与其隶属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度之间的对应关系，“+”也不表示求和，而是表示模糊集在论域 U 上的整体，且当某元素的隶属度为零时，可略去不写.

（2）序偶表示法

$$\underset{\sim}{A}=\{(\underset{\sim}{A}(u_1),u_1),(\underset{\sim}{A}(u_2),u_2),\cdots,(\underset{\sim}{A}(u_n),u_n)\}$$

这种表示法是由普通集合的列举法演变过来的，它由元素和它的隶属度组成有序对（前者是隶属度，后者是元素）一一列出.

（3）向量表示法

$$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}(u_1),\underset{\sim}{A}(u_2),\cdots,\underset{\sim}{A}(u_n))$$

这种表示法是借助于 n 维数组来实现的，即当论域 U 中的元素先后次序排定时，按此顺序记载各元素的隶属度（此时隶属度为 0 的项不能舍弃），这时 $\underset{\sim}{A}$ 也称为模糊向量，简记为

$$A = (\underset{\sim}{A}(u_1), \underset{\sim}{A}(u_2), \cdots, \underset{\sim}{A}(u_n))$$

(4) Zadeh 与向量式的结合表示法

$$\underset{\sim}{A} = \left(\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1}, \frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2}, \cdots, \frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}\right)$$

例如 设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$, 并且 $\underset{\sim}{A}(1) = 0$, $\underset{\sim}{A}(2) = 0.2$, $\underset{\sim}{A}(3) = 0.8$, $\underset{\sim}{A}(4) = 1$, $\underset{\sim}{A}(5) = 0.8$, $\underset{\sim}{A}(6) = 0.2$, $\underset{\sim}{A}(7) = 0$, 则

$\underset{\sim}{A}$ 的 Zadeh 表示式为

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.2}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{5} + \frac{0.2}{6}$$

$\underset{\sim}{A}$ 的序偶表示式为

$$\underset{\sim}{A} = \{(0,1), (0.2,2), (0.8,3), (1,4), (0.8,5), (0.2,6), (0,7)\}$$

或 $\underset{\sim}{A} = \{(0.2,2), (0.8,3), (1,4), (0.8,5), (0.2,6)\}$;

$\underset{\sim}{A}$ 的向量表示式为

$$\underset{\sim}{A} = (0, 0.2, 0.8, 1, 0.8, 0.2, 0)$$

$\underset{\sim}{A}$ 的 Zadeh 与向量的结合式为

$$\underset{\sim}{A} = \left(\frac{0}{1}, \frac{0.2}{2}, \frac{0.8}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0.8}{5}, \frac{0.2}{6}, \frac{0}{7}\right)$$

$\underset{\sim}{A}$ 可解释为 U 上"靠近于 4 的数".

1.1.2.2 *U* 为无限集

(1) U 为无限可列集●

● 无限可列集是指与自然数集 $N = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 存在着一一对应的集合，如 $U = \{2, 4, 6, \cdots\}$ 就是无限可列集.

设无限可列集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots\}$，此时把上述四种表示法略加修改，便都可拿来使用．比如设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$，其隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}(u_n)=\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots),\quad u_n\in U$$

则 $\underset{\sim}{A}$ 的 Zadeh 式

$$\underset{\sim}{A}=\frac{1/1}{u_1}+\frac{1/2}{u_2}+\cdots+\frac{1/n}{u_n}+\cdots$$

$\underset{\sim}{A}$ 的向量式

$$\underset{\sim}{A}=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right)$$

$\underset{\sim}{A}$ 的序偶式

$$A=\left\{(1,u_1),\left(\frac{1}{2},u_2\right),\cdots,\left(\frac{1}{n},u_n\right),\cdots\right\}$$

$\underset{\sim}{A}$ 的结合式

$$\underset{\sim}{A}=\left(\frac{1}{u_1},\frac{1/2}{u_2},\cdots,\frac{1/n}{u_n},\cdots\right)$$

（2）U 为无限不可列集●

$$\underset{\sim}{A}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(u)}{u}$$

其中 $\underset{\sim}{A}(u)/u$ 不是被积分式，更不是分数，只是元素 u 与其隶属度之间的对应；符号“$\int$”既不表示积分，也不表示求和，而是表示论域 U 上的元素与其隶属度对应关系的一个总括．此记号对 U 的各种情况都适用．

比如例 1-3 中的“年轻人”可表为

● 指非无限可列集的无限集，如由 3 与 4 间的全体实数组成的集合（3，4）就是非无限可列集．

$$\underset{\sim}{Y} = \int_{0 \leqslant u \leqslant 25} \frac{1}{u} + \int_{25 < u \leqslant 200} \left(\left[1 + \left(\frac{u-25}{5} \right)^2 \right]^{-1} \Big/ u \right)$$

由上述易见，模糊集的表示方法与普通集的表示方法有本质区别，前者强调的是元素 u 的隶属程度，而后者只需指明 u 的归属就行了.

1.2 模糊集的运算及其性质

1.2.1 模糊集的运算

在普通集合中，我们曾讲过普通集间的运算和关系与其特征函数间的运算和关系相一致，而模糊集是由推广了的特征函数——隶属函数来定义的，因此借助于隶属函数来定义模糊集间运算和关系，就是十分自然的事了.

1.2.1.1 模糊集之间的包含与相等关系

定义 1-3 设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$，如果对于 $\forall u \in U$，有 $\underset{\sim}{A}(u) \geqslant \underset{\sim}{B}(u)$ 成立，则称 $\underset{\sim}{A}$ 包含 $\underset{\sim}{B}$，记作 $\underset{\sim}{A} \supseteq \underset{\sim}{B}$.

$\underset{\sim}{A} \supseteq \underset{\sim}{B}$ 的实质是 U 中的任一元素 u 隶属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度都高于隶属于 $\underset{\sim}{B}$ 的程度.

定义 1-4 设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$，如果对于 $\forall u \in U$，都有 $\underset{\sim}{A}(u) = \underset{\sim}{B}(u)$，则称 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 相等，记作 $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$.

$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$ 的含义是 U 中任一元素隶属于 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的程度是相同的.

容易证明，$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$ 且 $\underset{\sim}{A} \supseteq \underset{\sim}{B}$.

1.2.1.2 模糊集的并、交、余运算

定义 1-5 设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{C} \in \mathscr{F}(U)$，如果对于 $\forall u \in U$，有 $\underset{\sim}{C}(u) = \underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{B}(u)$，则 $\underset{\sim}{C}$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的并，记为 $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$；

如果对于 $\forall u \in U$，有 $\underset{\sim}{C}(u) = \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u)$，则称 $\underset{\sim}{C}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的交，记为 $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$.

定义 1-6 设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$,如果对于 $\forall u \in U$,有 $\underset{\sim}{B}(u) = 1 - \underset{\sim}{A}(u)$,则 $\underset{\sim}{B}$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的余集,记为 $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}^c$.

任给 a、$b \in [0,1]$,由于 $0 \leqslant a \vee b \leqslant 1$,$0 \leqslant a \wedge b \leqslant 1$ 及 $0 \leqslant 1 - a \leqslant 1$,故对于任意的 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$,上述定义二者的并($\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$)、交($\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$),以及 $\underset{\sim}{A}$ 的余集($\underset{\sim}{A}^c$),运算是有意义的.

由定义可知,两模糊集间的运算实际上就是逐点对隶属度作相应的运算.

模糊集的并、交、余运算可用几何图形给予说明(见图 1-5).

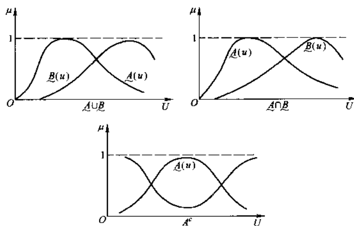


图 1-5 模糊集运算

例 1-4 设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$,$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$,且

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{u_1} + \frac{0.9}{u_2} + \frac{0.4}{u_3} + \frac{0.2}{u_4}$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.9}{u_1} + \frac{0.8}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.1}{u_5}$$

求 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}^c$.

解

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \frac{1}{u_1} + \frac{0.9}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.2}{u_4} + \frac{0.1}{u_5}$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \frac{0.9}{u_1} + \frac{0.8}{u_2} + \frac{0.4}{u_3}$$

$$\underset{\sim}{A}^c = \frac{0.1}{u_2} + \frac{0.6}{u_3} + \frac{0.8}{u_4} + \frac{1}{u_5}$$

例1-5 若 $\underset{\sim}{O}$，$\underset{\sim}{Y}$ 分别表示例1-3中"年老"和"年轻"两模糊集，求 $\underset{\sim}{O}$ 与 $\underset{\sim}{Y}$ 的并 $\underset{\sim}{O} \cup \underset{\sim}{Y}$（年老或年轻）、交 $\underset{\sim}{O} \cap \underset{\sim}{Y}$（又老又年轻）及余 $\underset{\sim}{Y}^c$（不年轻）.

解

$$(\underset{\sim}{O} \cup \underset{\sim}{Y})(u) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leqslant u \leqslant 25 \\ \left[1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & , \quad 25 < u \leqslant 51 \\ \left[1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & , \quad 51 < u \leqslant 200 \end{cases}$$

$$(\underset{\sim}{O} \cap \underset{\sim}{Y})(u) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leqslant u \leqslant 50 \\ \left[1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & , \quad 50 < u \leqslant 51 \\ \left[1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & , \quad 51 < u \leqslant 200 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{Y}^c(u) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leqslant u \leqslant 25 \\ 1 - \left[1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & , \quad 25 < u \leqslant 200 \end{cases}$$

模糊集的并，交运算还可推广到任意多个模糊集上去.

设 $\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，…，$\underset{\sim}{A}_n$为论域 U 上的 n 个模糊集，定义它们的并 $\left(\text{记为} \bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i\right)$ 具有隶属函数

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i\right)(u)\triangleq\bigvee_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i(u)=\max\{\underset{\sim}{A}_1(u),\underset{\sim}{A}_2(u),\cdots,\underset{\sim}{A}_n(u)\}$$

定义它们的交 $\left(记为\bigcap_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i\right)$ 具有隶属函数

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i\right)(u)\triangleq\bigwedge_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i(u)=\min\{\underset{\sim}{A}_1(u),\underset{\sim}{A}_2(u),\cdots,\underset{\sim}{A}_n(u)\}$$

类似地可定义论域 U 上的一族模糊集 $\{\underset{\sim}{A}_t\,|\,t\in T\}$（$T$ 为指标集）的并与交,它们分别记为 $\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t$ 与 $\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t$，其隶属函数分别为

$$\left(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t\right)(u)\triangleq\bigvee_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t(u)=\sup\{\underset{\sim}{A}_t(u)\,|\,t\in T\}$$

$$\left(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t\right)(u)\triangleq\bigwedge_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t(u)=\inf\{\underset{\sim}{A}_t(u)\,|\,t\in T\}$$

于是模糊集的并、交运算可更一般地表示为

$$\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}_T=\int_U\left(\bigvee_{t\in T}\frac{\underset{\sim}{A}_t(u)}{u}\right)$$

$$\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}_T=\int_U\left(\bigwedge_{t\in T}\frac{\underset{\sim}{A}_t(u)}{u}\right)$$

1.2.2 模糊集的运算性质

模糊集的运算满足以下性质：

设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{C}\in\mathscr{F}(U)$，则有

(1) 幂等律 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$

(2) 交换律 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A}$

(3) 结合律 $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})$

$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})$

(4) 分配律 $\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{C})$

$\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{C})$

(5) 吸收律 $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A},(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$

(6) 0-1 律 $\underset{\sim}{A}\cup\varnothing=\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A}\cap\varnothing=\varnothing$

$$\underset{\sim}{A} \cup U = U, \underset{\sim}{A} \cap U = \underset{\sim}{A}$$

(7) 对偶律 $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^c = \underset{\sim}{A}^c \cap \underset{\sim}{B}^c$

$$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})^c = \underset{\sim}{A}^c \cup \underset{\sim}{B}^c$$

(8) 复原律 $(\underset{\sim}{A}^c)^c = \underset{\sim}{A}$

证 只证 (4)、(7) 的第一式，其余留给读者完成.

先证 $\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$. 对 $\forall u \in U$,

$$(\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}))(u) = \underset{\sim}{A}(u) \vee (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C})(u)$$

$$= \underset{\sim}{A}(u) \vee [\underset{\sim}{B}(u) \wedge \underset{\sim}{C}(u)]$$

$$[(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})](u) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})(u) \wedge (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})(u)$$

$$= [\underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{B}(u)] \wedge [\underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{C}(u)]$$

由于 $\underset{\sim}{A}(u)$, $\underset{\sim}{B}(u)$, $\underset{\sim}{C}(u)$ 的大小顺序共有六种情况，因此需分别进行讨论，但因证法完全类似，故仅就 $\underset{\sim}{A}(u) \geqslant \underset{\sim}{B}(u) \geqslant \underset{\sim}{C}(u)$ 的情况给出证明，其余情况的证明可作为读者的练习.

当 $\underset{\sim}{A}(u) \geqslant \underset{\sim}{B}(u) \geqslant \underset{\sim}{C}(u)$ 时，因为

$$\underset{\sim}{A}(u) \vee [\underset{\sim}{B}(u) \wedge \underset{\sim}{C}(u)] = \underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{C}(u) = \underset{\sim}{A}(u)$$

$$[\underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{B}(u)] \wedge [\underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{C}(u)] = \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{A}(u) = \underset{\sim}{A}(u)$$

所以 $(\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}))(u) = ((\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C}))(u)$

亦即 $\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$

再证 $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^c = \underset{\sim}{A}^c \cap \underset{\sim}{B}^c$, 对 $\forall u \in U$

$$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^c(u) = 1 - (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})(u) = 1 - \underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{B}(u)$$

$$(\underset{\sim}{A}^c \cap \underset{\sim}{B}^c)(u) = \underset{\sim}{A}^c(u) \wedge \underset{\sim}{B}^c(u)$$

$$= (1 - \underset{\sim}{A}(u)) \wedge (1 - \underset{\sim}{B}(u))$$

当 $\underset{\sim}{A}(u) \geqslant \underset{\sim}{B}(u)$ 时，因为

$$1-(\underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{B}(u))=1-\underset{\sim}{A}(u)$$

$$(1-\underset{\sim}{A}(u)) \wedge (1-\underset{\sim}{B}(u))=1-\underset{\sim}{A}(u)$$

所以 $$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^c(u)=(\underset{\sim}{A}^c \cap \underset{\sim}{B}^c)(u)$$

同样可证 $\underset{\sim}{B}(u) \geqslant \underset{\sim}{A}(u)$ 时，有 $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^c(u)=(\underset{\sim}{A}^c \cap \underset{\sim}{B}^c)(u)$，

故 $$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^c=\underset{\sim}{A}^c \cap B^c$$

需指出的是，模糊集上的余运算不满足互补律，即 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A}^c \neq U$，事实上

$$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A}^c)(u)=\underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{A}^c(u)=\underset{\sim}{A}(u) \vee (1-\underset{\sim}{A}(u)) \neq 1,$$

除非 $\underset{\sim}{A}(u) \in \{0,1\}$，故 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A}^c \neq U$.

同理 $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A}^c \neq \varnothing$

这正好说明当 $\underset{\sim}{A}(u) \in \{0,1\}$ 时，模糊集退化为普通集.

模糊集上的余运算不满足互补律，其实质是模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 及 $\underset{\sim}{A}^c$ 无明确的边界. $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A}^c \neq \varnothing$ 说明 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{A}^c$ 交迭，但这种交迭受到一定的限制，即

$$\forall \underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U),\quad \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{A}^c(u) \leqslant \frac{1}{2} \quad (\forall u \in U)$$

同样 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A}^c \neq U$，说明 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A}^c$ 不一定完全覆盖 U，但有下述结论：

$$\forall \underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U), \underset{\sim}{A}(u) \vee A^c(u) \geqslant \frac{1}{2} \quad (\forall u \in U)$$

1.2.3 模糊集运算的其他定义

两模糊集 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 的并、交运算，实际上是 [0, 1] 中的二

元运算，即逐点对隶属度 $\underset{\sim}{A}(u)$、$\underset{\sim}{B}(u)$ 进行相应的运算，其定义的一般形式如下：

定义 1-7 设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$，定义并、交运算的一般形式为

$$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})(u) \triangleq \underset{\sim}{A}(u) \vee^{*} \underset{\sim}{B}(u),$$

$$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})(u) \triangleq \underset{\sim}{A}(u) \wedge^{*} \underset{\sim}{B}(u)$$

其中$\vee^{*}$，$\wedge^{*}$均为 [0, 1] 中的二元运算，通常简称为模糊算子.

除了"$\vee$"、"$\wedge$"这对算子外，还有一些别的算子，常用的有以下几种：

(1) 概率算子"$\hat{+}$"、"$\hat{\cdot}$"

$$a \mathbin{\hat{+}} b = a + b - ab, \quad a \mathbin{\hat{\cdot}} b = ab$$

(2) 有界算子"$\oplus$"、"$\ominus$"

$$a \oplus b = \min(1, a + b), \quad a \ominus b = \max(0, a + b - 1)$$

(3) Einstein 算子"$\overset{+}{\varepsilon}$"、"$\dot{\varepsilon}$"

$$a \overset{+}{\varepsilon} b = \frac{a + b}{1 + ab}, \quad a \dot{\varepsilon} b = \frac{ab}{1 + (1 - a)(1 - b)}$$

(4) 最大乘积算子"$\vee$"、"$\cdot$"

$$a \vee b = \max(a, b), \quad a \cdot b = ab$$

(5) 有界与最小算子"$\oplus$"、"$\wedge$"

$$a \oplus b = \min(1, a + b), \quad a \wedge b = \min(a, b)$$

(6) Hamacher 算子"$\overset{+}{r}$"、"$\dot{r}$"

$$a \overset{+}{r} b = \frac{a \mathbin{\hat{+}} b - (1 - r)ab}{r + (1 - r)(1 - ab)}, \quad a \dot{r} b = \frac{ab}{r + (1 - r)(a \mathbin{\hat{+}} b)}$$

其中$r \in [1, +\infty)$，且当$r = 1$时，$(\overset{+}{r}, \dot{r})$ 化为$(\hat{+}, \cdot)$；当$r = 2$时，

$(\dot{\tau},\dot{\gamma})$ 化为$(\dot{\varepsilon},\dot{\varepsilon})$.

(7) Yager 算子"$\underset{v}{\curlywedge}$"、"$\underset{v}{\curlyvee}$"

$$a \underset{v}{\curlywedge} b = \min(1,(a^{v}+b^{v})^{\frac{1}{v}})$$

$$a \underset{v}{\curlyvee} b = 1-\min(1,[(1-a)^{v}+(1-b)^{v}]^{\frac{1}{v}})$$

其中 $v\in[1,+\infty)$,且当 $v=1$ 时,$(\underset{v}{\curlywedge},\underset{v}{\curlyvee})$ 化为$(\oplus,\ominus)$;当 $v\to+\infty$ 时,化为$(\vee,\wedge)$.

(8) Schweizer-Sklard 算子"$\perp_p$"、"$\top_p$"

$$a\perp_p b=\begin{cases}1-((1-a)^{-p}+(1-b)^{-p}-1)^{-\frac{1}{p}}, & p>0\\ a\,\hat{+}\,b, & p=0\\ 1-((1-a)^{-p}+(1-b)^{-p}-1)^{-\frac{1}{p}}, & p<0\text{ 且 }c>1\\ 1, & p<0\text{ 且 }c\leqslant 1\end{cases}$$

其中 $c=(1-a)^{-p}+(1-b)^{-p}$

$$a\top_p b=\begin{cases}(a^{-p}+b^{-p}-1)^{-\frac{1}{p}}, & p>0\\ ab, & p=0\\ (a^{-p}+b^{-p}-1)^{-\frac{1}{p}}, & p<0\text{ 且 }a^{-p}+b^{-p}>1\\ 0, & p<0\text{ 且 }a^{-p}+b^{-p}\leqslant 1\end{cases}$$

当 $p=-1$ 时 $(\perp_p,\top_p)$ 化为 $(\oplus,\ominus)$; 当 $p=0$ 时, 化为 $(\hat{+},\cdot)$; 当$p\to+\infty$时化为 $(\vee,\wedge)$.

以上各式中的 $a=\underset{\sim}{A}(u),b=\underset{\sim}{B}(u)$,而 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$.

显然, 当 $\{a,b\}\subseteq[0,1]$ 时, 上述算子都可化为普通集合的隶属度运算, 因而它们的定义都具有一定的合理性. 但这些算子又各自都有本身的特点, 分别适合描写不同的现实, 人们可针对具体问题, 选择恰当的算子使用.

1.3 模糊集的截集

1.3.1 λ-截集

模糊集合能较客观地反映现实中存在着的模糊概念，但在处理实际问题过程中，要最后作出判断或决策时，往往又需要将模糊集合变成各种不同的普通集合．例如，选学某门课的研究生共有8名，组成一集合 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8\}$．设在一次考试中，他们的成绩依次为95，96，80，91，81，71，89，87．若规定90分以上是"优等生"，则优等生集合是 $\{u_1,u_2,u_4\}$．这里所说的"优等生"实际上是一个模糊概念，它存在程度上的差异，需用隶属度来描述．根据经验及有关规定，可给出优等生的隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}(\text{优等生})\triangleq\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{0.9}{u_4}+\frac{0.2}{u_5}+\frac{0}{u_6}+\frac{0.8}{u_7}+\frac{0.6}{u_8}$$

于是问优等生有哪些人，就相当于问隶属度 $\underset{\sim}{A}(u)\geqslant 0.9$ 的有哪些人．用 $A_{0.9}$ 表示这一集合，因此，有 $A_{0.9}=\{u_1,u_2,u_4\}$，这是一普通集合．

这样，我们从一个模糊集合得到了一个普通集．诸如此类问题，在其他场合也经常遇到．把这一思想抽象为一个概念，用数学形式给出，就是λ-截集（或λ水平集）的概念．

定义1-8 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$，对于任意 $\lambda\in[0,1]$，记

$$(\underset{\sim}{A})_\lambda\triangleq A_\lambda\triangleq\{u\mid \underset{\sim}{A}(u)\geqslant\lambda\}$$

A_λ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的**λ-截集**（或**λ水平集**），λ称为阈值或置信水平．

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\triangleq\{u\mid \underset{\sim}{A}(u)>\lambda\}$$

称为 A 的λ-强截集，相应地 A_λ 也称为 $\underset{\sim}{A}$ 的λ-弱截集．

例1-6 设 $\underset{\sim}{A}$ 为实数集 X 上的模糊集，其隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

求 $A_{0.5}$.

解 由 λ-截集定义，有

$$A_{0.5} = \left\{x \mid \underset{\sim}{A}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \geqslant 0.5\right\}$$
$$= \{x \mid -\sqrt{\ln 4} \leqslant x \leqslant \sqrt{\ln 4}\}$$

说明：(1) $\underset{\sim}{A}$ 的 λ-截集 A_λ 是一个普通集，它是通过对 $\underset{\sim}{A}$ 的截取得到的.

(2) 截取模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ-截集 A_λ，就是将 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数按下式转化成特征函数，即

$$A_\lambda(u) = \begin{cases} 1, & \underset{\sim}{A}(u) \geqslant \lambda \\ 0, & \underset{\sim}{A}(u) < \lambda \end{cases}$$

如例 1-6 中，

$$A_{0.5}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\sqrt{\ln 4}, \sqrt{\ln 4}] \\ 0, & x \bar{\in} [-\sqrt{\ln 4}, \sqrt{\ln 4}] \end{cases}$$

(3) 由 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数到 A_λ（或 A_r）的特征函数的转换，如图 1-6 所示.

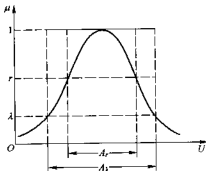


图 1-6 λ-截集

图中曲线是 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数 $\underset{\sim}{A}(u)$，矩形波形状的曲线是 A_λ（或 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$）的特征函数 $A_\lambda(u)$（或 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(u)$）.

1.3.2 λ-截集的性质

性质 1 $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda, (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$

证 只证第一式.

$u \in (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})_\lambda \Leftrightarrow (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})(u) \geqslant \lambda \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{B}(u) \geqslant \lambda \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}(u) \geqslant \lambda$ 或 $\underset{\sim}{B}(u) \geqslant \lambda \Leftrightarrow u \in A_\lambda$ 或 $u \in B_\lambda \Leftrightarrow u \in A_\lambda \cup B_\lambda$

性质 2 设 $\lambda, \gamma \in [0,1]$，且 $\lambda \leqslant \gamma$，则 $A_\lambda \supseteq A_\gamma$，特别 $A_0 = U$.

证 $u \in A_\gamma \Rightarrow \underset{\sim}{A}(u) \geqslant \gamma \overset{\gamma \geqslant \lambda}{\Rightarrow} A(u) \geqslant \gamma \geqslant \lambda \Rightarrow u \in A_\lambda$，所以 $A_\lambda \supseteq A_\gamma$.

这个性质说明，截集水平越低，A_λ 越大；反之，水平越高，A_λ 就越小. 特别当 $\lambda = 1$ 时，A_λ 最小；$\lambda = 0$ 时，A_λ 最大.

注意：一般地 $(\underset{\sim}{A}^c)_\lambda \neq (A_\lambda)^c$，比如设 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$，且

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.4}{u_1} + \frac{0.7}{u_2} + \frac{0.8}{u_3}$$

$$\underset{\sim}{A}^c = \frac{0.6}{u_1} + \frac{0.3}{u_2} + \frac{0.2}{u_3}$$

于是 $(\underset{\sim}{A}^c)_{0.4} = \{u_1\}$，$A_{0.4} = \{u_1, u_2, u_3\}$，$(A_{0.4})^c = \varnothing$，易见 $(\underset{\sim}{A}^c)_{0.4} \neq (A_{0.4})^c$.

性质 3 $(\underset{\sim}{A}^c)_\lambda = (A_{1-\underset{\cdot}{\lambda}})^c, (\underset{\sim}{A}^c)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (A_{1-\lambda})^c$

证 仅证第一式. $u \in (\underset{\sim}{A}^c)_\lambda \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}^c(u) = 1 - \underset{\sim}{A}(u) \geqslant \lambda \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}(u) \leqslant 1 - \lambda \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}(u) \not> 1 - \lambda \Leftrightarrow u \notin A_{1-\underset{\cdot}{\lambda}} \Leftrightarrow u \in (A_{1-\underset{\cdot}{\lambda}})^c$.

性质 4 设 $A^{(t)} \in \mathscr{F}(U)(t \in T)$，则

$$\left(\bigcup_{t \in T} \underset{\sim}{A}^{(t)}\right)_\lambda \supseteq \bigcup_{t \in T} A_\lambda^{(t)}, \quad \left(\bigcap_{t \in T} \underset{\sim}{A}^{(t)}\right)_\lambda = \bigcap_{t \in T} A_\lambda^{(t)}$$

证 仅证第一式. 设 $u \in \bigcup_{t \in T} A_\lambda^{(t)} \Leftrightarrow$ 存在 $t_0 \in T$，使 $u \in A_\lambda^{(t_0)}$，于

是

$$\underset{\sim}{A}^{(t_0)}(u) \geqslant \lambda \Rightarrow \bigvee_{t\in T} \underset{\sim}{A}^{(t)}(u) \geqslant \lambda$$

即 $$\left(\bigcup_{t\in T} \underset{\sim}{A}^{(t)}\right)(u) \geqslant \lambda \Rightarrow u \in \left(\bigcup_{t\in T} \underset{\sim}{A}^{(t)}\right)_\lambda$$

故有 $$\left(\bigcup_{t\in T} \underset{\sim}{A}^{(t)}\right)_\lambda \supseteq \bigcup_{t\in T} A_\lambda^{(t)}$$

应注意上式一般不能写成等式. 例如对 $\forall u \in U$, 设

$$\underset{\sim}{A}^{(n)}(u) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

于是 $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{A}^{(n)}\right)(u) = \frac{1}{2}$$

从而 $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{A}^{(n)}\right)_{0.5} = U$$

另外由 $A_{0.5}^{(n)} = \varnothing$,可知 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{0.5}^{(n)} = \varnothing$,故 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{A}^{(n)}\right)_{0.5} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{0.5}^{(n)}$

1.3.3 核及支集

定义 1-9 设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$, A_1 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的核, 记为 Ker $\underset{\sim}{A}$, 即

$$\text{Ker}\,\underset{\sim}{A} = \{u \mid \underset{\sim}{A}(u) = 1\} = A_1$$

$A_{\underset{\cdot}{0}}$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的支集（或支撑集）, 记为 Supp $\underset{\sim}{A}$, 即

$$\text{Supp}\,\underset{\sim}{A} = \{u \mid \underset{\sim}{A}(u) > 0\} = A_{\underset{\cdot}{0}}$$

而 Supp $\underset{\sim}{A} - A_1$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的边界. 若 A_1 非空, $\underset{\sim}{A}$ 称为正规模糊集（如图 1-7).

核是由 $\underset{\sim}{A}$ 中隶属度等于 1 的元素组成的普通集, 核中的元素是完全隶属于 $\underset{\sim}{A}$ 的成员, 而支集则是由 $\underset{\sim}{A}$ 中隶属度大于零的元素组成的普通集, 且当 λ 从 1 趋于 0 时, A_λ 从 Ker $\underset{\sim}{A}$ 开始不断扩大, 收进越来越多的元素, 最终变成 Supp $\underset{\sim}{A}$. 因此, 普通

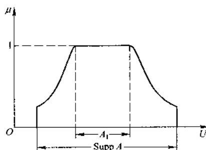


图 1-7　核与支集

集合族

$$\{A_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$$

象征着一个具有游移边界的集合，一个具有弹性疆域的集合，一个可变的、运动的集合，且由性质 2 易知，它还是一个集合"套"一个集合的集合族. $\underset{\sim}{A}$ 的边界 Supp $\underset{\sim}{A} - A_1$ 是介于完全属于 $\underset{\sim}{A}$ 与完全不属于 $\underset{\sim}{A}$ 之间的全体元素，我们称之为 $\underset{\sim}{A}$ 的"灰色"地带.

关于支集与核有如下性质（由读者完成证明）:

(1) $\mathrm{Supp}\varnothing = \mathrm{Ker}\varnothing = \varnothing, \mathrm{Supp}U = \mathrm{Ker}U = U$

(2) $\mathrm{Supp}(\mathrm{Supp}\underset{\sim}{A}) = \mathrm{Supp}\underset{\sim}{A}, \mathrm{Ker}(\mathrm{Ker}\underset{\sim}{A}) = \mathrm{Ker}\underset{\sim}{A}$

(3) $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{Supp}\underset{\sim}{A} \cap \mathrm{Supp}\underset{\sim}{B} = \varnothing$

定义 1-10　设 $\lambda\in[0,1]$, $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$, 定义 $(\lambda\underset{\sim}{A})\in\mathscr{F}(U)$, 它的隶属函数为

$$(\lambda\underset{\sim}{A})(u) \triangleq \lambda\wedge\underset{\sim}{A}(u)$$

模糊集 $\lambda\underset{\sim}{A}$ 称为数 λ 与模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的乘积.

特别的，若 $A\in\mathscr{P}(U)$, 则

$$(\lambda A)(u) = \lambda \wedge A(u) = \begin{cases} \lambda, & u \in A \\ 0, & u \notin A \end{cases}$$

这里的 λA 也是一模糊集.

1.4 分解定理与表现定理

1.4.1 分解定理

分解定理是模糊数学理论发展的重要组成部分，它给出如何把模糊集分解成普通集，从而可把模糊集里的问题化成普通集里的问题来讨论，前面介绍的 λ-截集的概念，实际上给出了一种把模糊集化为普通集的方法.

若 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，对给定一个 $\lambda_0 \in [0,1]$，就得到一个普通集 A_{λ_0}，如果让 λ 取遍 $[0,1]$ 内所有的值，就可得到无穷多个 A_λ.

反之，若把 A_{λ_0} 乘以 λ_0，就得到一个模糊集 $\lambda_0 A_{\lambda_0}$，其隶属函数（图 1-8）为

$$(\lambda_0 A_{\lambda_0})(u) = \begin{cases} \lambda_0, & u \in A_{\lambda_0} \\ 0, & u \notin A_{\lambda_0} \end{cases}$$

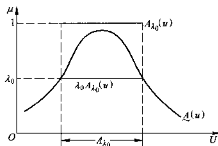


图 1-8 普通集与模糊集的转换

同样，若用 λ 分别乘以上述的无穷多个 A_λ，就会得到无穷多个模糊集 λA_λ，它们的隶属函数为

$$(\lambda A_\lambda)(u)=\begin{cases}\lambda, & u\in A_\lambda\\ 0, & u\notin A_\lambda\end{cases}$$

这样，如果把得到的所有的模糊集求并集，就得到原来的模糊集 $\underset{\sim}{A}$.

把上述过程用数学形式写出来，就是下面的分解定理.

定理 1-1 （分解定理Ⅰ）设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$，则有

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$$

或 $$\underset{\sim}{A}(u)=\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda\Big)(u)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda(u))$$

其中 $A_\lambda(u)$ 是 A_λ 的特征函数.

证

$$\begin{aligned}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda\Big)(u)&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda A_\lambda)(u)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda(u))\\ &=\max\Big[\bigvee_{0\leqslant\lambda\leqslant\underset{\sim}{A}(u)}(\lambda\wedge A_\lambda(u)),\ \bigvee_{\underset{\sim}{A}(u)<\lambda\leqslant1}(\lambda\wedge A_\lambda(u))\Big]\\ &=\max\Big[\bigvee_{0\leqslant\lambda\leqslant\underset{\sim}{A}(u)}(\lambda\wedge 1),\ \bigvee_{\underset{\sim}{A}(u)<\lambda\leqslant1}(\lambda\wedge 0)\Big]\\ &=\bigvee_{0\leqslant\lambda\leqslant\underset{\sim}{A}(u)}\lambda=\underset{\sim}{A}(u)\end{aligned}$$

分解定理是模糊数学的基本定理之一，它反映了模糊集与普通集的密切联系. 为了对分解定理有一个直观的理解，下面通过几何图形（见图 1-9）来说明.

图中台阶状粗线表示 $\Big(\bigcup_{i=0}^{5}\lambda_iA_i\Big)(u)$，易见 λ 取值愈细，台阶值愈"密"，当 λ 取遍 $[0,1]$ 内的一切值时，$\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda\Big)(u)$ 将构成隶属函数 $\underset{\sim}{A}(u)$ 的图形.

类似地有分解定理Ⅱ.

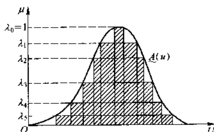


图 1-9　分解定理图像

定理 1-2（分解定理Ⅱ）　设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，则

$$\underset{\sim}{A} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

此定理的证明留给读者去做.

定理 1-3（分解定理Ⅲ）　设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，令

$$H: [0,1] \to \mathscr{P}(U) \quad \lambda \mapsto H(\lambda)$$

对 $\forall \lambda \in [0,1]$，满足：

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_{\lambda}$$

那么(1) $\underset{\sim}{A} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)$

(2) 对 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$，若 $\lambda_1 < \lambda_2$，则

$$H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2)$$

(3) 对 $\forall \lambda \in [0,1]$，有

$$A_{\lambda} = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \quad (\lambda \neq 0), \quad A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha) \quad (\lambda \neq 1)$$

证　(1) 对 $\forall \lambda \in [0,1]$，因为

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_{\lambda}$$

所以
$$\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \lambda H(\lambda) \subseteq \lambda A_{\lambda}$$

从而 $$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\lambda}$$

由分解定理Ⅰ与Ⅱ知

$$\underset{\sim}{A} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\lambda}$$

故 $$\underset{\sim}{A} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$$

(2) 当 $\lambda_1 < \lambda_2$ 时，易推知 $A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}} \supseteq A_{\lambda_2}$，因此有

$$H(\lambda_1) \supseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}} \supseteq A_{\lambda_2} \supseteq H(\lambda_2)$$

(3) 取定 $\lambda > 0$，对 $\forall\alpha < \lambda$，有

$$H(\alpha) \supseteq A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \supseteq A_{\lambda}$$

从而 $$\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \supseteq A_{\lambda}$$

由于 $H(\alpha) \subseteq A_{\alpha}$，因此有

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} A_{\alpha} = A_{\left(\underset{\alpha<\lambda}{\vee}\alpha\right)} = A_{\lambda}(\lambda \neq 0)$$

故 $$A_{\lambda} = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \qquad (\lambda \neq 0)$$

同样可证 $$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha) \qquad (\lambda \neq 1)$$

分解定理Ⅰ与Ⅱ给出了如何用 λ-截集来构造模糊集的方法，而分解定理Ⅲ则进一步给出了如何用满足一定条件的集合（不一定是截集）来构造模糊集的方法，因此它比前面两个分解定理具有更广泛的实用价值.

1.4.2 表现定理

表现定理与分解定理一样，也是模糊数学的最基本的定理之一，它从另一角度来阐明模糊集是由普通集扩充而成的.

先引进集合套的概念.

定义 1-11 令

$$H: [0,1] \to \mathscr{P}(U), \lambda \mapsto H(\lambda)$$

且对 $\forall \lambda_1、\lambda_2 \in [0,1]$,若 $\lambda_1 < \lambda_2$,均有 $H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2)$,则 H 称为 U 上的集合套.

比如分解定理Ⅲ中的映射 H,就是 U 上的一个集合套,特别地，对于任一 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，截集族 $\{A_\lambda | \lambda \in [0,1]\}$ 以及 $\{A_{\underset{\cdot}{\lambda}} | \lambda \in [0,1]\}$ 都是 U 上的集合套.

分解定理Ⅲ告诉我们，一个模糊集可由一个集合套“拼成”，那么，任何一个集合套是否都能“拼成”一个模糊集呢?表现定理给了肯定的回答.

定理 1-4（表现定理） 设 H 是 U 上的任意一个集合套，则

$$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)$$

是 U 上一个模糊集，记作 $\underset{\sim}{A}$，且对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 有

(1) $A_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha)$

(2) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha)$

证 $\forall \lambda \in [0,1]$,由于 $H(\lambda) \in \mathscr{P}(U)$, $\lambda H(\lambda) \in \mathscr{F}(U)$,从而 $\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) \in \mathscr{F}(U)$,即 $\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)$ 是 U 上的模糊集，记

$$\underset{\sim}{A} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)$$

下面先证明对于 $\forall \lambda \in [0,1]$,有

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$$

设 $u \in A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,即 $\underset{\sim}{A}(u) > \lambda$,亦即 $\bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge H(\alpha)(u)) > \lambda$.这表明 $\exists \lambda_0 \in [0,1]$,使 $\lambda_0 \wedge H(\lambda_0)(u) > \lambda$,于是有 $\lambda_0 > \lambda$ 并且 $H(\lambda_0)(u) = 1$，从而 $u \in H(\lambda_0) \subseteq H(\lambda)$. 由 $u \in H(\lambda)$ 有 $H(\lambda)(u) = 1$,故

$$\underset{\sim}{A}(u) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge H(\alpha)(u)) \geqslant \lambda \wedge H(\lambda)(u) = \lambda$$

因此 $u \in A_\lambda$. 这就证明了 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$. 再由分解定理Ⅲ,便可

得出本定理的结论.

由定理的证明过程可得如下推论:

推论 设 H 是 U 上的集合套，记

$$\underset{\sim}{A} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)$$

则对 $\forall \lambda \in [0,1]$，有

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$$

习 题 1

1. 试举出几个你所学专业中或日常生活中的模糊概念或模糊性现象.

2. 设 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_7\}$，$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{C} \in \mathscr{F}(U)$，且

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.5}{u_2} + \frac{0.3}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{0.7}{u_6}$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.3}{u_1} + \frac{0.9}{u_2} + \frac{0.4}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{0.6}{u_5} + \frac{1}{u_7}$$

$$\underset{\sim}{C} = \frac{1}{u_1} + \frac{0.3}{u_2} + \frac{0.6}{u_3} + \frac{0.2}{u_4} + \frac{1}{u_6} + \frac{0.6}{u_7}$$

求 $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$，$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^c \cap \underset{\sim}{C}$，$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})^c \cup \underset{\sim}{C}$，$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A}^c) \cup \underset{\sim}{A}$，$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A}^c) \cap \underset{\sim}{C}$.

3. 设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{C} \in \mathscr{F}(U)$，证明以下性质成立：

(1) $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$

(2) $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$

(3) $(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C})$

(4) $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$

(5) $(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup \underset{\sim}{C} = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C}) \cap (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C})$

(6) $U \cap \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$，$\varnothing \cup \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$

(7) $(\underset{\sim}{A}^c)^c = \underset{\sim}{A}$

4. 利用性质证明下列等式：

(1) $(\underset{\sim}{A}\cap((\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})\cup(\underset{\sim}{A}^c\cap\underset{\sim}{C}^c)))\cup\underset{\sim}{C}^c=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})\cup\underset{\sim}{C}^c$

(2) $(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})\cup(\underset{\sim}{C}\cap\underset{\sim}{A})=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})\cap(\underset{\sim}{C}\cup\underset{\sim}{A})$

5. 设 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$ 均为实数域 X 上的模糊集，且

$$\underset{\sim}{A}(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right],\quad \underset{\sim}{B}(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right],$$

求 $\underset{\sim}{A}^c(x),(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(x),(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})(x),A_{0.5},B_{0.25}$.

6. 古代史分期（指划分奴隶社会和封建社会的界限）是模糊的，若记“奴隶社会”为 $\underset{\sim}{A}$，且

$$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{夏}+\frac{1}{商}+\frac{0.9}{西周}+\frac{0.7}{春秋}+\frac{0.5}{战国}+\frac{0.4}{秦}+\frac{0.3}{西汉}+\frac{0.1}{东汉},$$

求 Supp $\underset{\sim}{A}$，Ker $\underset{\sim}{A}$，Supp $\underset{\sim}{A}-A_1$.

7. 设 $\underset{\sim}{A}=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.6}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{0.7}{u_4}+\frac{0.9}{u_5}+\frac{1}{u_6}$,求截集 $A_{0.5},A_{0.2}$.

8. 证明：$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda$.

9. 证明：$(A^c)_{\underset{\lambda}{}}=(A_{1-\lambda})^c$.

10. 设 $\underset{\sim}{A}^{(t)}\in\mathscr{F}(U),t\in T$,证明 $\left(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}\right)_\lambda=\bigcap_{t\in T}A_\lambda^{(t)}$.

11. 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$,证明：$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\underset{\lambda}{}}$.

12. 设 $U=\{a,b,c,d,e\}$，$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$，试用分解定理 I 求模糊集 $\underset{\sim}{A}$，已知

$$A_\lambda=\begin{cases}\{a,b,c,d,e\}, & 0\le\lambda\le0.2\\ \{a,b,c,e,\}, & 0.2<\lambda\le0.5\\ \{a,c,e\}, & 0.5<\lambda\le0.7\\ \{c\}, & 0.7<\lambda\le1\end{cases}$$

第 2 章　模糊集的数量指标

本章介绍模糊集的一些数量指标，主要包括模糊集的高、深度、模糊度以及两模糊集的距离和贴近度. 通过对数量指标的讨论，可以加深我们对模糊集的理解.

2.1　模糊集的高、深度及基数

我们知道，模糊集完全由其隶属函数来确定，知道了隶属函数也就知道了模糊集. 但是有时我们希望知道模糊集某方面的特性，比如要了解模糊集的“大小”，模糊程度以及两模糊集间的“距离”等等. 这时光知道隶属函数是不够的，还需引入一些数量指标，来描述模糊集的这些特性.

2.1.1　高和深度

定义 2-1　设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，记

$$\operatorname{hgt} \underset{\sim}{A} \triangleq \sup_{u \in U} \underset{\sim}{A}(u), \quad \operatorname{dph} \underset{\sim}{A} \triangleq \inf_{u \in U} \underset{\sim}{A}(u)$$

分别称为模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的高和深度.

模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的高和深度，都是反映模糊集隶属函数的极值状态. 高反映的是“极大”方面的情况，深度反映的是“极小”方面的情况. 对于有限集上的模糊集，高和深度实际上就是模糊集的隶属函数的最大和最小值.

另外，若 $\underset{\sim}{A}$ 是非正规模糊集，且存在 $u_0 \in U$，使 $\underset{\sim}{A}(u_0) = \operatorname{hgt} \underset{\sim}{A}$，那么我们可借助 $\operatorname{hgt} \underset{\sim}{A}$ 把 $\underset{\sim}{A}$ 化为正规模糊集. 即如果定义

$$\underset{\sim}{A}'(u) \triangleq \frac{\underset{\sim}{A}(u)}{\operatorname{hgt} \underset{\sim}{A}} \qquad (\forall u \in U)$$

则 $\underset{\sim}{A}'$是正规模糊集，$\underset{\sim}{A}'$称为 $\underset{\sim}{A}$ 的正规化模糊集.

例 2-1 设 $U=\{a,b,c,d\}$，且

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.8}{a}+\frac{0.4}{b}+\frac{0.7}{c}+\frac{0.2}{d}$$

为 U 上一非正规化模糊集，求 hgt $\underset{\sim}{A}$，dph $\underset{\sim}{A}$，并求 $\underset{\sim}{A}$ 的正规化模糊集 $\underset{\sim}{A}'$.

解

$$\text{hgt}\,\underset{\sim}{A}=\sup_{u\in U}\underset{\sim}{A}(u)=0.8$$

$$\text{dph}\,\underset{\sim}{A}=\inf_{u\in U}\underset{\sim}{A}(u)=0.2$$

$$\underset{\sim}{A}'(u)=\frac{\underset{\sim}{A}(u)}{\text{hgt}\,\underset{\sim}{A}}=\frac{1}{a}+\frac{0.5}{b}+\frac{0.875}{c}+\frac{0.25}{d}$$

例 2-2 设 $\underset{\sim}{A}$ 是实数域 X 上的模糊集“所有比 1 大得多的实数”，其隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1+100/(x-1)^2}, & x>1\end{cases}$$

求 hgt $\underset{\sim}{A}$ 和 dph $\underset{\sim}{A}$.

解

$$\text{hgt}\,\underset{\sim}{A}=\sup_{x\in X}\underset{\sim}{A}(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+100/(x-1)^2}=1$$

$$\text{dph}\,\underset{\sim}{A}=\inf_{x\in X}\underset{\sim}{A}(x)=0$$

2.1.2 基数

若无特别声明，本章总假定以后的论域是非空有限集

$$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$$

定义 2-2 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$，记

$$|\underset{\sim}{A}|\triangleq\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(u_i),\quad \|\underset{\sim}{A}\|\triangleq\frac{|\underset{\sim}{A}|}{n}$$

分别称为模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的基数和相对基数.

基数 $|\underset{\sim}{A}|$ 是描述 $\underset{\sim}{A}$ 的“容量”的一个数量指标，当 $\underset{\sim}{A}$ 是普通集合时，$|\underset{\sim}{A}|$ 就是普通集合的元素的个数. 相对基数 $\|\underset{\sim}{A}\|$ 则是描述 $\underset{\sim}{A}$ 的“浓度”的指标.

例 2-3 设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，且

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.6}{u_1}+\frac{0.8}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}$$

是 U 上的模糊集，求 $|\underset{\sim}{B}|$ 及 $\|\underset{\sim}{B}\|$.

解

$$|\underset{\sim}{B}|=\sum_{i=1}^{4}\underset{\sim}{B}(u_i)=0.6+0.8+0.2+0.4=2$$

$$\|\underset{\sim}{B}\|=\frac{|\underset{\sim}{B}|}{4}=\frac{2}{4}=0.5$$

关于模糊集的高、深度及基数有下面的结论.

定理 2-1 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$，则下列性质成立：

(1) $\mathrm{dph}\,\underset{\sim}{A}\leqslant\|\underset{\sim}{A}\|\leqslant\mathrm{hgt}\,\underset{\sim}{A}$

(2) $\|\underset{\sim}{A}\|+\|\underset{\sim}{A}^c\|=1$

(3) $\mathrm{dph}\,\underset{\sim}{A}=1-\mathrm{hgt}\,\underset{\sim}{A}^c$

证 (1) 显然.

$$(2)\ \|\underset{\sim}{A}\|+\|\underset{\sim}{A}^c\|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(u_i)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}^c(u_i)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{A}(u_i)+\underset{\sim}{A}^c(u_i))$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{A}(u_i)+1-\underset{\sim}{A}(u_i))$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1=1$$

$$(3)\qquad 1-\mathrm{hgt}\,\underset{\sim}{A}^c=1-\sup_{u\in U}\underset{\sim}{A}^c(u)=1-\sup_{u\in U}(1-\underset{\sim}{A}(u))$$

$$=1-\left(1-\inf_{u\in U}\underset{\sim}{A}(u)\right)=\inf_{u\in U}\underset{\sim}{A}(u)=\mathrm{dph}\,\underset{\sim}{A}$$

2.2 模糊集的均值与方差

仿照概率统计中的均值与方差的概念，可给出实数域上模糊集的均值与方差的概念.

定义 2-3 设有实数域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$（或 $X=[\alpha,\beta]$），且 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$，称

$$E(\underset{\sim}{A})=\frac{\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(x_i)\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(x_i)}$$

$$\left(\text{或}\,E(\underset{\sim}{A})=\frac{\int_\alpha^\beta \underset{\sim}{A}(x)x\mathrm{d}x}{\int_\alpha^\beta \underset{\sim}{A}(x)\mathrm{d}x},\text{且}\int_\alpha^\beta \underset{\sim}{A}(x)\mathrm{d}x\neq 0\right)$$

为模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的均值，而称

$$\mathrm{var}(\underset{\sim}{A})=\frac{\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(x_i)(x_i-E(\underset{\sim}{A}))^2}{\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(x_i)}$$

$$\left(\text{或}\,\mathrm{var}(\underset{\sim}{A})=\frac{\int_\alpha^\beta \underset{\sim}{A}(x)(x-E(\underset{\sim}{A}))^2\mathrm{d}x}{\int_\alpha^\beta \underset{\sim}{A}(x)\mathrm{d}x},\text{且}\int_\alpha^\beta \underset{\sim}{A}(x)\mathrm{d}x\neq 0\right)$$

为模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的方差.

可见：均值 $E(\underset{\sim}{A})$ 描述的是 $\underset{\sim}{A}$ 的“集中的位置”，而方差 $\mathrm{var}(\underset{\sim}{A})$ 则描述了 $\underset{\sim}{A}$ 的“分散程度”.

例 2-4 设实数集 $X=\{1,2,3,4,5\}$，$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(\underset{\sim}{A})$，且

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.2}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.2}{5}$$

求 $E(\underset{\sim}{A})$, $\mathrm{var}(\underset{\sim}{A})$.

解

$$E(\underset{\sim}{A}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}(x_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}(x_i)} = \frac{0.2 + 1.6 + 3 + 3.2 + 1}{3} = 3$$

$$\mathrm{var}(\underset{\sim}{A}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}(x_i)(x_i - E(\underset{\sim}{A}))^2}{\sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}(x_i)}$$

$$= \frac{0.2 \times 4 + 0.8 \times 1 + 1 \times 0 + 0.8 \times 1 + 0.2 \times 4}{3} = \frac{3.2}{3}$$

例 2-5 设实数域为 $X = [1, \mathrm{e}]$, $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(X)$, 且 $\underset{\sim}{A}(x) = \ln x (1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e})$, 求 $E(\underset{\sim}{A})$, $\mathrm{var}(\underset{\sim}{A})$.

解

$$E(\underset{\sim}{A}) = \frac{\int_\alpha^\beta \underset{\sim}{A}(x) x \mathrm{d}x}{\int_\alpha^\beta \underset{\sim}{A}(x) \mathrm{d}x} = \frac{\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \cdot x \mathrm{d}x}{\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x \mathrm{d}x}{x \ln x \big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}(\mathrm{e}^2 - 1)}{\mathrm{e} - \mathrm{e} + 1} = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}$$

$$\mathrm{var}(\underset{\sim}{A}) = \frac{\int_1^{\mathrm{e}} \underset{\sim}{A}(x)(x - E(\underset{\sim}{A}))^2 \mathrm{d}x}{\int_1^{\mathrm{e}} \underset{\sim}{A}(x) \mathrm{d}x} = \frac{\int_1^{\mathrm{e}} \ln x (x - E(\underset{\sim}{A}))^2 \mathrm{d}x}{\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x}$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x \mathrm{d}x - 2E(\underset{\sim}{A}) \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \mathrm{d}x + E^2(\underset{\sim}{A}) \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\mathrm{e}^3 + 1}{9} - 2E^2(\underset{\sim}{A}) + E^2(\underset{\sim}{A})$$

$$= \frac{2\mathrm{e}^3 + 1}{9} - E^2(\underset{\sim}{A}) = \frac{2\mathrm{e}^3 + 1}{9} - \frac{(\mathrm{e}^2 + 1)^2}{16}$$

2.3 模糊度

模糊度是描述模糊集的模糊程度的数量指标. 不同的模糊集其模糊程度是不一样的，即使是同一论域上的模糊集，它们的模糊程度也可能有较大区别. 比如

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.9}{u_1} + \frac{0.8}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.1}{u_4}$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.4}{u_1} + \frac{0.5}{u_2} + \frac{0.5}{u_3} + \frac{0.6}{u_4}$$

是论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 上的两个模糊集. 直观地看，$\underset{\sim}{B}$ 似乎要比 $\underset{\sim}{A}$ 更模糊些，因此寻求一个数量指标来描述模糊集的模糊程度是很必要的. 那么用一个怎样的数量来描述模糊集的模糊程度呢? 一种自然的想法是，普通集是不模糊的，标志它的模糊程度的数量应该为零；而对 $\forall u \in U$,若 $\underset{\sim}{A}(u) \equiv 0.5$,则 $\underset{\sim}{A}^c(u) \equiv 0.5$,此时 $\underset{\sim}{A}$ 最为模糊，标志其模糊程度的数量应为 1；又因为 $|\underset{\sim}{A}(u) - 0.5| = |\underset{\sim}{A}^c(u) - 0.5|$,所以 $\underset{\sim}{A}$ 与 A^c 的模糊程度应该相等. 此外，标志模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊性大小的量还应该具有性质：$\underset{\sim}{A}(u)$ 越远离 0.5，其值越小，反之越靠近 0.5，其值越大. 基于此想法，可定义模糊度如下：

定义 2-4 若映射 $d: \mathscr{F}(U) \to [0,1]$ 满足，

(1) $d(\underset{\sim}{A}) = 0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$

(2) $d(\underset{\sim}{A}) = 1 \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}(u) \equiv 0.5$,对 $\forall u \in U$

(3) 若对 $\forall u_i \in U$,有 $\underset{\sim}{A}(u_i) \geqslant \underset{\sim}{B}(u_i) \geqslant 0.5$,或 $\underset{\sim}{A}(u_i) \leqslant \underset{\sim}{B}(u_i) \leqslant 0.5$,则 $d(\underset{\sim}{A}) \leqslant d(\underset{\sim}{B})$

(4) $d(\underset{\sim}{A}) = d(\underset{\sim}{A}^c)$

则 $d(\underset{\sim}{A})$ 称为模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊度.

这是一个公理化的定义，它只给出了模糊度最基本的要求，但此定义不适用于计算，在实用中还需给出其具体的形式. 由定

义可知，模糊度的具体形式不是唯一的. 下面我们给出一种可进行计算的模糊度.

令 $$L(\underset{\sim}{A}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i)|.$$

由于

(1) $L(\underset{\sim}{A}) = 0 \Leftrightarrow \underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$

(2) $$L(\underset{\sim}{A}) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i)| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i)| = \frac{n}{2} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}(u_i) \equiv \frac{1}{2}$$ [●]

(3) 当 $\underset{\sim}{A}(u_i) \geqslant \underset{\sim}{B}(u_i) \geqslant 0.5$ 时

$$\begin{aligned} L(\underset{\sim}{A}) &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i)| \\ &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i) - 1| \leqslant \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{B}(u_i) - 1| \\ &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{B}(u_i) - B_{0.5}(u_i)| = L(\underset{\sim}{B}) \end{aligned}$$

●下面证明若 $\sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i)| = \frac{n}{2}$，则 $\underset{\sim}{A}(u_i) \equiv 0.5(i = 1,2,\cdots,n)$.

证 先证 $\underset{\sim}{A}(u_i) \geqslant 0.5(i = 1,2,\cdots,n)$. 如若不然，不妨设 $\underset{\sim}{A}(u_1) < 0.5$，而 $\underset{\sim}{A}(u_i) \geqslant 0.5(i = 2,3,\cdots,n)$，于是有

$$\frac{n}{2} = \sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i)| = \underset{\sim}{A}(u_1) + \sum_{i=2}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i) - 1| < \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{n}{2}$$

这是不可能的，从而 $\underset{\sim}{A}(u_i) \geqslant 0.5$.

再证 $\underset{\sim}{A}(u_i) \equiv 0.5(i = 1,2,\cdots,n)$. 如若不然，不妨设 $\underset{\sim}{A}(u_1) > 0.5$，于是有

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} &= \sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i)| \\ &= |\underset{\sim}{A}(u_1) - A_{0.5}(u_1)| + \sum_{i=2}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i)| \\ &= |\underset{\sim}{A}(u_1) - 1| + \sum_{i=2}^{n}\left|\frac{1}{2} - 1\right| < \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

这也是不可能的，从而 $\underset{\sim}{A}(u_i) \equiv 0.5$.

当 $\underset{\sim}{A}(u_i) \leqslant \underset{\sim}{B}(u_i) \leqslant 0.5$ 时,同样可证 $L(\underset{\sim}{A}) \leqslant L(\underset{\sim}{B})$(留作习题).

$$
\begin{aligned}
(4)\quad L(\underset{\sim}{A}^c) &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \left| \underset{\sim}{A}^c(u_i) - (\underset{\sim}{A}^c)_{0.5}(u_i) \right| \\
&= \frac{2}{n}\Big[\sum_{i\in N_1} \left| \underset{\sim}{A}^c(u_i) - (\underset{\sim}{A}^c)_{0.5}(u_i) \right| \\
&\quad + \sum_{j\in N_2} \left| \underset{\sim}{A}^c(u_j) - (\underset{\sim}{A}^c)_{0.5}(u_j) \right| \\
&\quad + \sum_{k\in N_3} \left| \underset{\sim}{A}^c(u_k) - (\underset{\sim}{A}^c)_{0.5}(u_k) \right| \Big] \\
&= \frac{2}{n}\Big[\sum_{i\in N_1} \left| 1 - \underset{\sim}{A}(u_i) - 0 \right| \\
&\quad + \sum_{j\in N_2} \left| 1 - \underset{\sim}{A}(u_j) - 1 \right| + \sum_{k\in N_3} \left| 1 - \underset{\sim}{A}(u_k) - 1 \right| \Big] \\
&= \frac{2}{n}\Big[\sum_{i\in N_1} \left| \underset{\sim}{A}(u_i) - 1 \right| + \sum_{j\in N_2} \left| \frac{1}{2} - 1 \right| + \sum_{k\in N_3} \left| \underset{\sim}{A}(u_k) - 0 \right| \Big] \\
&= \frac{2}{n}\Big[\sum_{i\in N_1} \left| \underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i) \right| + \sum_{j\in N_2} \left| \underset{\sim}{A}(u_j) - A_{0.5}(u_j) \right| \\
&\quad + \sum_{k\in N_3} \left| \underset{\sim}{A}(u_k) - A_{0.5}(u_k) \right| \Big] \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \left| \underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i) \right| = L(\underset{\sim}{A})
\end{aligned}
$$

其中 $N_1 \cup N_2 \cup N_3 = N = \{1,2,\cdots,n\}$, $N_1 \cap N_2 \cap N_3 = \varnothing$, $N_1 = \{i \mid i\in N \text{ 且 } \underset{\sim}{A}^c(u_i) < 0.5\}$, $N_2 = \{j \mid j\in N \text{ 且 } \underset{\sim}{A}^c(u_j) = 0.5\}$, $N_3 = \{k \mid k\in N \text{ 且 } \underset{\sim}{A}^c(u_k) > 0.5\}$. 从而 $L(\underset{\sim}{A})$ 满足定义 2-4 的四条要求,于是有下面的定义.

定义 2-5 设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$,记

$$
L(\underset{\sim}{A}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \left| \underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i) \right|
$$

$L(\underset{\sim}{A})$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的 L-模糊度.

下面介绍度量模糊集的模糊程度的另一具体形式.

定义 2-6 设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，记

$$H(\underset{\sim}{A}) = k\sum_{i=1}^{n} S(\underset{\sim}{A}(u_i))$$

$H(\underset{\sim}{A})$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊熵，其中 $k = 1/(n\ln 2)$，$S(X) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$.

容易验证 $H(\underset{\sim}{A})$ 满足模糊度的定义. 故可以 $H(\underset{\sim}{A})$ 作为模糊度的另一种度量工具.

熵，原是一个热力学概念，它是描述分子运动无规则性的一种量度，现用它描述模糊度，是模糊集所含模糊性大小的一种量度.

例 2-6 设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，且

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.1}{u_1} + \frac{0.3}{u_2} + \frac{0.7}{u_3} + \frac{0.8}{u_4} + \frac{0.5}{u_5}$$

求 $|\underset{\sim}{A}|$，$\|\underset{\sim}{A}\|$，$\mathrm{hgt}\,\underset{\sim}{A}$，$\mathrm{dph}\,\underset{\sim}{A}$，$L(\underset{\sim}{A})$，$H(\underset{\sim}{A})$.

解

$$|\underset{\sim}{A}| = \sum_{i=1}^{5} \underset{\sim}{A}(u_i) = 0.1 + 0.3 + 0.7 + 0.8 + 0.5 = 2.4$$

$$\|\underset{\sim}{A}\| = \frac{|\underset{\sim}{A}|}{5} = \frac{2.4}{5} = 0.48$$

$$\mathrm{hgt}\,\underset{\sim}{A} = \sup_{u_i \in U} \underset{\sim}{A}(u_i) = 0.8$$

$$\mathrm{dph}\,\underset{\sim}{A} = \inf_{u_i \in U} \underset{\sim}{A}(u_i) = 0.1$$

$$L(\underset{\sim}{A}) = \frac{2}{5}\sum_{i=1}^{5} |\underset{\sim}{A}(u_i) - A_{0.5}(u_i)|$$

$$= 0.4(|0.1 - 0| + |0.3 - 0| + |0.7 - 1|$$

$$+|0.8-1|+|0.5-1|)$$

$$=0.4(0.1+0.3+0.3+0.2+0.5)=0.56$$

$$H(\underset{\sim}{A})=\frac{-1}{5\ln 2}\sum_{i=1}^{5}(\underset{\sim}{A}(u_i)\ln\underset{\sim}{A}(u_i))$$

$$+(1-\underset{\sim}{A}(u_i))\ln(1-\underset{\sim}{A}(u_i))\approx 0.77$$

2.4 两模糊集的距离

我们日常所说的距离是指 Euclid 空间中的距离，它可以用数学语言这样来描述．设 U 为论域，x、$y\in U$，x 与 y 间的距离 $d(x,y)$ 是一个非负实数，它满足下述三条公理：

(1) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

(2) $d(x,y)=d(y,x)$

(3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$（其中 $z\in U$）

回忆一下我们在线性代数中曾学过的两个距离公式：

$d(a,b)=|x-y|$（其中 x,y 分别是直线上两点 a,b 的坐标）

$$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}$$

（其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是 n 维向量空间的任两向量）都是非负实数，且易验证它们均符合上述三条公理．仿此，我们可定义两模糊集的距离．

定义 2-7 设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$，记

$$d_M(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\triangleq\left[\sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$\left(d_M(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\triangleq\left[\int_a^b|\underset{\sim}{A}(u)-\underset{\sim}{B}(u)|^p\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{p}}\right.$，此时 U 为 X 上的有限区间$\Big)$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 间的 **Minkowski** 距离（p 为正实数）．

当 $p=2$ 时，称为 Euclid 距离，记为 $d_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$；

当 $p=1$ 时，称为 Hamming 距离，记为 $d_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$.

例 2-7 设 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$，且

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.6}{u_2}+\frac{0.1}{u_3}$$

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.6}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{0.8}{u_3}$$

为 U 上两模糊集,求 $d_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$,$d_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$.

解 $$d_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\left[\sum_{i=1}^{3}|\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=(0.16+0.09+0.49)^{\frac{1}{2}}\approx 0.86$$

$$d_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sum_{i=1}^{3}|\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i)|$$

$$=0.4+0.3+0.7=1.4$$

在实用中常用所谓“相对 Hamming 距离”，“加权 Hamming 距离”和“加权相对 Hamming 距离”. 它们的定义分别为

$$\delta(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\triangleq\frac{1}{n}d_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$$

$$d_\omega(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\triangleq\sum_{i=1}^{n}\omega(u_i)|\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i)|$$

$$\delta_\omega(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\triangleq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(u_i)|\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i)|$$

其中 $\omega(u_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是加于 u_i 上的权数，一般要求能满足归一条件，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega(u_i)=1$$

例 2-8 设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$,且

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.8}{u_1}+\frac{0.5}{u_2}+\frac{0.7}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{1}{u_5}$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.2}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{0.7}{u_3} + \frac{0.1}{u_4} + \frac{0.4}{u_5}$$

为 U 上两模糊集，权数向量为 $\omega = (1,2,0.5,0.5,1)$，求 $\delta(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$，$d_\omega(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$ 及 $\delta_\omega(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$.

解

$$\delta(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \frac{d_H(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})}{5}$$

$$= 0.2(0.6 + 0.1 + 0 + 0.3 + 0.6) = 0.32$$

$$d_\omega(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sum_{i=1}^{5} \omega(u_i) \mid \underset{\sim}{A}(u_i) - \underset{\sim}{B}(u_i) \mid$$

$$= 1 \times 0.6 + 2 \times 0.1 + 0.5 \times 0 + 0.5 \times 0.3 + 1 \times 0.6$$

$$= 0.6 + 0.2 + 0 + 0.15 + 0.6 = 1.55$$

$$\delta_\omega(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \frac{d_\omega(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})}{5} = 0.31$$

加权 Hamming 距离有很大的实用价值，看一个具体例子.

例 2-9 设某农作物在 A 地产量较高，现计划把该农作物移植到气温、湿度、土壤条件不同的 B 地或 C 地，问 B、C 两地哪里较适宜?

解 由于植物对气温、湿度、土模三个条件的要求各不相同，因此不能把这三个条件等同看待，需要应用加权 Hamming 距离来处理. 取 $U = \{气温,湿度,土模\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ 作为论域，则 A、B、C 地的环境均是 U 上的模糊集，根据专家评定，表示三地环境的模糊集分别为

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.8}{u_1} + \frac{0.4}{u_2} + \frac{0.6}{u_3}$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.9}{u_1} + \frac{0.5}{u_2} + \frac{0.3}{u_3}$$

$$\underset{\sim}{C} = \frac{0.6}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{0.5}{u_3}$$

根据经验取权数 $\omega = (1.5, 0.7, 0.8)$. 易见它满足归一条件. 又

$$d_\omega(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = 1.5 \times 0.1 + 0.7 \times 0.1 + 0.8 \times 0.3 = 0.46$$

$$d_\omega(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C}) = 1.5 \times 0.2 + 0.7 \times 0.2 + 0.8 \times 0.1 = 0.52$$

因 $d_\omega(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) < d_\omega(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C})$,说明 A 地与 B 地的环境比较相近,因此在 B 地移植此农作物较为适合.

需要说明一点，使用 Hamming 距离处理问题时，一定要对具体问题作具体分析，不能生搬硬套，否则有时得到的结论与实际情况不符. 比如选择人才，合格成绩是 60 分，现张三 85 分，李四 58 分，将这些分数均除以 100，作为隶属度，则张三的成绩与合格成绩的 Hamming 距离为

$$|0.60 - 0.85| = 0.25$$

而李四的成绩与合格成绩的 Hamming 距离为

$$|0.60 - 0.58| = 0.02$$

如选取距离小的则应选李四，显然这是不符合实际情况的. 为什么会出现这种情况呢？原因是这个问题与例 2-9 不同，前例是越靠近标准越好，而此问题却是高出合格成绩越多越好. 这就是说在处理此类问题时，必须要考虑到距离的“正”、“负”. 所谓距离的正负是指：

若 $\underset{\sim}{A}(u_i) - \underset{\sim}{B}(u_i) > 0$,则 $\underset{\sim}{A}$ 对 $\underset{\sim}{B}$ 的距离称为“正距离”；

若 $\underset{\sim}{A}(u_i) - \underset{\sim}{B}(u_i) < 0$,则 $\underset{\sim}{A}$ 对 $\underset{\sim}{B}$ 的距离称为“负距离”.

例 2-10 某公司按德、才、学、识四个方面录用人员. 每一个人的素质均是论域

$$U = \{德,才,学,识\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

上的模糊集. 现需从甲、乙两备选人中录取一人，而表示这两人素质的模糊集分别为

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.8}{u_1} + \frac{0.5}{u_2} + \frac{0.6}{u_3} + \frac{0.6}{u_4}$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.6}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{0.8}{u_3} + \frac{0.7}{u_4}$$

问应录用哪一个？

解 不同的工作对四个方面的要求是不同的，即权数不同.如给定权重分配

$$\omega = (1.5, 0.7, 0.7, 1.1)$$

计算加权距离，并考虑正负，则有

$$\begin{aligned} d_\omega(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) &= 1.5(0.8-0.6) + 0.7(0.5-0.6) \\ &\quad + 0.7(0.6-0.8) + 1.1(0.6-0.7) \\ &= -0.02 \end{aligned}$$

这说明甲比乙略差，应录用乙.

若另一工作岗位注重德，所给定的权数分配为

$$\omega' = (2.5, 0.5, 0.5, 0.5)$$

则

$$\begin{aligned} d_{\omega'}(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) &= 2.5(0.8-0.6) + 0.5(0.5-0.6) \\ &\quad + 0.5(0.6-0.8) + 0.5(0.6-0.7) \\ &= 0.30 \end{aligned}$$

此时当然应录用甲.

2.5 两模糊集的贴近度

贴近度是度量两模糊集接近程度的数量指标，下面给出其定义.

定义 2-8 设映射

$$D: \mathscr{F}(U) \times \mathscr{F}(U) \to [0,1]$$

满足条件：

(1) $D(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = D(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A})$

(2) $D(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})=1$

(3) 若 $\underset{\sim}{A}\supseteq\underset{\sim}{B}\supseteq\underset{\sim}{C}$,或 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}$

则 $$D(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\geqslant D(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})$$

那么 $D(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的贴近度.

这也是一个公理化的定义. 为满足应用上的需要，下面给出几个具体的贴近度.

(1) Hamming 贴近度

$$D_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i)|$$

$$\left(\text{或 } D_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{b-a}\int_a^b|\underset{\sim}{A}(u)-\underset{\sim}{B}(u)|\mathrm{d}u\right)$$

(2) Euclid 贴近度

$$D_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i))^2}$$

$$\left(\text{或 } D_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int_a^b(\underset{\sim}{A}(u)-\underset{\sim}{B}(u))^2\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

(3) 格贴近度

$$D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B})\wedge(\underset{\sim}{A}\bullet\underset{\sim}{B})^c$$

其中 $$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}\triangleq\bigvee_{u\in U}(\underset{\sim}{A}(u)\wedge\underset{\sim}{B}(u))$$

$$\underset{\sim}{A}\bullet\underset{\sim}{B}\triangleq\bigwedge_{u\in U}(\underset{\sim}{A}(u)\vee\underset{\sim}{B}(u))$$

分别称为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的内积与外积. 而 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}^{\circ}(U)=\{\underset{\sim}{A}\mid A_1\neq\varnothing,\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A}\neq U\}$.

(4) 最大最小贴近度

$$D(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min(\underset{\sim}{A}(u_i),\underset{\sim}{B}(u_i))}{\sum_{i=1}^{n}\max(\underset{\sim}{A}(u_i),\underset{\sim}{B}(u_i))}$$

（5）算术平均最小贴近度

$$D(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{2\sum_{i=1}^{n}\min(\underset{\sim}{A}(u_i),\underset{\sim}{B}(u_i))}{\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(u_i)+\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{B}(u_i)}$$

容易验证上述各式均符合贴近度的条件.

例 2-11 设 $\underset{\sim}{A}=\frac{0.4}{u_1}+\frac{0.8}{u_2}+\frac{1}{u_4}+\frac{0.6}{u_5}$

$\underset{\sim}{B}=\frac{0.5}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{0.3}{u_3}+\frac{0.6}{u_4}$

为 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ 上两模糊集,求 $D_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}),D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$.

解

$$\begin{aligned}D_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})&=1-\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}|\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i)|\\&=1-0.2(0.1+0.2+0.3+0.4+0.6)\\&=1-0.32=0.68\end{aligned}$$

$$D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B})\wedge(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})^c=0.8\wedge(1-0.3)=0.7$$

以上各种不同形式的贴近度计算公式各有优缺点，不能笼统地比较其优劣. 但若隶属函数为连续函数，且满足格贴近度条件时，用格贴近度较简单. 例如设

$$\underset{\sim}{A}(x)=e^{-\frac{(x-\alpha_1)^2}{\sigma_1^2}}\qquad(\alpha_2>\alpha_1)$$
$$\underset{\sim}{B}(x)=e^{-\frac{(x-\alpha_2)^2}{\sigma_2^2}}$$

如图 2-1，易见 $\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=0$,而且 $\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$ 恰好等于两曲线在交点 x_0 处的高度，而 x_0 满足

$$\frac{(x-\alpha_1)^2}{\sigma_1^2}=\frac{(x-\alpha_2)^2}{\sigma_2^2}$$

从而 $$x_0=\frac{\sigma_1\alpha_2+\sigma_2\alpha_1}{\sigma_1+\sigma_2}$$

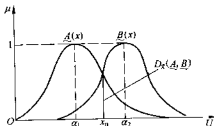


图 2-1 正态型模糊集的格贴近度

(另有一根 $x_0 = (\sigma_2\alpha_1 - \sigma_1\alpha_2)/(\sigma_2 - \sigma_1)$ 不介于 α_1,α_2 之间,舍去).

故
$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = e^{-\frac{(x_0-\alpha_1)^2}{\sigma_1^2}} = e^{-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\sigma_1+\sigma_2)^2}}$$

于是
$$D_g(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = e^{-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\sigma_1+\sigma_2)^2}}$$

习 题 2

1. 设 $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$, $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$, 且

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.2}{u_1} + \frac{0.4}{u_2} + \frac{0.5}{u_3} + \frac{0.7}{u_4} + \frac{0.9}{u_5}$$

求 $|\underset{\sim}{A}|$, $\|\underset{\sim}{A}\|$, hgt $\underset{\sim}{A}$, dph $\underset{\sim}{A}$, $L(\underset{\sim}{A})$, $H(\underset{\sim}{A})$.

2. 设 $X = [-1,1]$ 为实数域, $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(X)$, 且

$$\underset{\sim}{A}(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1-x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

求 $E(\underset{\sim}{A})$, var$(\underset{\sim}{A})$.

3. 设 $U = \{u_1,u_2,\cdots,u_6\}$, $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$,且

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.6}{u_1} + \frac{0.8}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0}{u_4} + \frac{0.4}{u_5} + \frac{0.5}{u_6}$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.7}{u_2} + \frac{0.8}{u_3} + \frac{0.7}{u_4} + \frac{0}{u_5} + \frac{1}{u_6}$$

求 $d_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}),d_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}),\delta(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}),D_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}),D_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}),D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$.

4. 设 $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，$\underset{\sim}{A}_i$、$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)(i = 1,2,3,4,5)$，且

$$\underset{\sim}{A}_1 = \frac{0.1}{u_1} + \frac{0.2}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.7}{u_4}$$

$$\underset{\sim}{A}_2 = \frac{0.4}{u_1} + \frac{0.1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{0.6}{u_5}$$

$$\underset{\sim}{A}_3 = \frac{0.3}{u_2} + \frac{0.5}{u_3} + \frac{0.9}{u_4} + \frac{1}{u_5}$$

$$\underset{\sim}{A}_4 = \frac{1}{u_1} + \frac{0.7}{u_2} + \frac{0.3}{u_4} + \frac{0.2}{u_5}$$

$$\underset{\sim}{A}_5 = \frac{0.6}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{0.3}{u_3} + \frac{0.8}{u_5}$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.3}{u_1} + \frac{0.4}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.9}{u_4}$$

分别用贴近度 (3)，(4)，(5) 判别 $\underset{\sim}{B}$ 与哪个 $\underset{\sim}{A}_i$最贴近.

5. 在天气预报评分中，定义天气预报评分 $S = D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$，而

$$\underset{\sim}{A}(x) = e^{-\frac{(x-\alpha_1)^2}{\sigma^2}}, \quad \underset{\sim}{B}(x) = e^{-\frac{(x-\alpha_2)^2}{\sigma^2}}$$

其中 α_1 为实况值，α_2 为预报值，σ 为标准差，今有某气象站预报甲、乙两地某月降水量．甲地预报为 220mm，实况为 225mm，标准差为 30mm；乙地预报为 40mm，实况为 0.5mm，标准差为 1mm．试分别求出甲、乙两地天气预报评分.

6. 证明关于 Hamming 贴近度，以下性质成立：

(1) $0 \leqslant D_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) \leqslant 1$

(2) $D_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 1 \Leftrightarrow \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$

(3) $D_H(U,\varnothing) = 0$

(4) $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{C} \Rightarrow D_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C}) \leqslant D_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) \wedge D_H(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})$

第 3 章　模糊关系

客观世界中各客体之间普遍存在着某种联系，集合论中的“关系”就是这种联系的抽象，它描述了客体间的“精确性”联系，而“模糊关系”则是从更深刻的意义上表现了客体间更广泛的联系. 本章着重介绍模糊关系的定义、性质及运算.

3.1　模糊关系的概念

3.1.1　模糊关系的定义

对一普通关系来说，两事物间要么有这种关系，要么没有这种关系，泾渭分明，然而在实际问题中，事物之间的许多关系很难用“有”或“无”来回答，如父母与子女的长相是否相像，有时就难以做出肯定或否定的判断. 两者间的“相像”关系并非非此即彼，而是亦此亦彼，具有程度上的差异. 再比如，冶炼过程中，原料、炉温、出钢时间等因素对钢的质量都有一定的影响，但有时某因素的改变却又不影响钢的合格，其原因在于各因素对钢质量的影响也有程度上的差异，我们把具有程度上差异的关系叫做模糊关系.

普通关系定义为直积 $U \times V$ 的普通子集，很自然地把模糊关系定义为 $U \times V$ 的模糊子集.

定义 3-1　直积 $U \times V$ 的一个模糊子集 $\underset{\sim}{R}$ 称为从 U 到 V 的一个模糊关系，记为

$$U \xrightarrow{\underset{\sim}{R}} V$$

而隶属度 $\underset{\sim}{R}(u,v)$ 则称为 $(u,v) \in U \times V$ 关于 $\underset{\sim}{R}$ 的相关程度.

由定义易见，$\underset{\sim}{R}$ 的论域为 $U \times V$.

特别的，当 $U=V$ 时，$\underset{\sim}{R}$ 称为 U 上的二元模糊关系；若 $\underset{\sim}{R}$ 的论域为 n 个集合的直积 $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$，则 $\underset{\sim}{R}$ 称为 n 元模糊关系.

若 $\underset{\sim}{R}$、$\underset{\sim}{S}$ 都是从 U 到 V 的模糊关系，对 $\forall(u,v) \in U \times V$，当 $\underset{\sim}{R}(u,v) = \underset{\sim}{S}(u,v)$ 时，称为 $\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 相等，记为 $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{S}$.

例 3-1 设 U 为某工厂同一工种的全体人员组成的集合，"技术水平相当"就是建立在 U 上的一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}$. 对于任意的 u、$v \in U$，若 u，v 技术水平完全一样，则令 $\underset{\sim}{R}(u,v) = 1$，若相差甚远则规定 $\underset{\sim}{R}(u,v) = 0$，其余取[0,1]内的值.

例 3-2 设 X 为横轴，Y 为纵轴，直积 $X \times Y$ 即为整个平面，则关系"x 远远大于 y"就是平面中的一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}$. 其隶属函数可定义为

$$\underset{\sim}{R}(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leqslant y \\ \dfrac{1}{1 + 100/(x-y)^2} & , \quad x > y \end{cases}$$

3.1.2 模糊关系的运算及其性质

由于模糊关系就是直积上的一个模糊子集，因此模糊子集的运算定义完全适用于模糊关系的运算，且它们的运算性质也是完全一样的，故在此我们不再做深入的讨论，只简单地叙述一下.

3.1.2.1 模糊关系的并、交、余运算

定义 3-2 设 $\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{S}$ 都是 U 到 V 上的模糊关系，它们的隶属函数分别为 $\underset{\sim}{R}(u,v)$，$\underset{\sim}{S}(u,v)((u,v) \in U \times V)$. 对 $\forall(u,v) \in U \times V$，若

$$(\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S})(u,v) \triangleq \underset{\sim}{R}(u,v) \vee \underset{\sim}{S}(u,v)$$

$$(\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S})(u,v) \triangleq \underset{\sim}{R}(u,v) \wedge \underset{\sim}{S}(u,v)$$

$$\underset{\sim}{R}^C(u,v) \triangleq 1 - \underset{\sim}{R}(u,v)$$

则 $\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}$，$\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}$ 分别称为模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 的并与交，而 $\underset{\sim}{R}^C$

称为模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的余关系.

定义 3-3 设 $\underset{\sim}{R}$、$\underset{\sim}{S} \in \mathscr{F}(U \times V)$，对 $\forall (u,v) \in U \times V$, 若

$$\underset{\sim}{R}(u,v) \geqslant \underset{\sim}{S}(u,v)$$

则称为模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 包含 $\underset{\sim}{S}$，记为 $\underset{\sim}{R} \supseteq \underset{\sim}{S}$.

特别地，(1) 对 $\forall (u,v) \in U \times V$, 若定义模糊关系

$$\underset{\sim}{R}^{T}(v,u) \triangleq \underset{\sim}{R}(u,v)$$

则 $\underset{\sim}{R}^{T}$ 称为 $\underset{\sim}{R}$ 的“倒逆关系”，也叫“倒置关系”. 而当 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times U)$ 且 $\underset{\sim}{R}^{T} = \underset{\sim}{R}$ 时，$\underset{\sim}{R}$ 称为模糊对称关系.

(2) 若 $\underset{\sim}{I}$ 为 U 到 U 的模糊关系，且对 $\forall (u,u') \in U \times U$, 有

$$\underset{\sim}{I}(u,u') = \begin{cases} 1, & u = u' \\ 0, & u \neq u' \end{cases}$$

则 I 称为 U 上的恒等关系.

(3) 若 $\underset{\sim}{O}$ 及 $\underset{\sim}{E}$ 均为 U 到 V 的模糊关系，且对 $\forall (u,v)$ 恒有

$$\underset{\sim}{O}(u,v) = 0 \quad 及 \quad \underset{\sim}{E}(u,v) = 1$$

则 $\underset{\sim}{O}$，$\underset{\sim}{E}$ 分别称为 U 到 V 的零关系及全称关系.

3.1.2.2 模糊关系的性质

(1) $(\underset{\sim}{R}^{C})^{C} = \underset{\sim}{R}$，$(\underset{\sim}{R}^{T})^{T} = \underset{\sim}{R}$

(2) $\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{E}$，$\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{R}$

(3) $\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{O} = \underset{\sim}{O}$，$\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{O} = \underset{\sim}{R}$

(4) 对 $\forall \underset{\sim}{R}$，有 $\underset{\sim}{O} \subseteq \underset{\sim}{R} \subseteq \underset{\sim}{E}$

(5) 若 $\underset{\sim}{R} \supseteq \underset{\sim}{S}$，则有 $\underset{\sim}{R}^{C} \subseteq \underset{\sim}{S}^{C}$

(6) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{R}_{i}\right)^{T} = \bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{R}_{i}^{T}$，$\left(\bigcap_{i=1}^{n} \underset{\sim}{R}_{i}\right)^{T} = \bigcap_{i=1}^{n} \underset{\sim}{R}_{i}^{T}$

3.1.2.3 模糊关系的合成

实际问题中，很多模糊关系是由两个模糊关系复合而成的. 仿照普通关系合成的定义，可给出模糊关系合成的定义.

定义 3-4 设 $\underset{\sim}{Q} \in \mathscr{F}(U \times V)$，$\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(V \times W)$，所谓 $\underset{\sim}{Q}$ 对 $\underset{\sim}{R}$ 的合成，是指从 U 到 W 的一个模糊关系，记作 $\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R}$. 它具有隶属函数

$$(\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R})(u,w) = \bigvee_{v \in V}(\underset{\sim}{Q}(u,v) \wedge \underset{\sim}{R}(v,w))$$

其中 $u \in U, v \in V, w \in W$. $\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R}$ 也称为 $\underset{\sim}{Q}$ 与 $\underset{\sim}{R}$ 的复合模糊关系.

特别地当 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times U)$ 时，记

$$\underset{\sim}{R}^2 \triangleq \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}, \quad \underset{\sim}{R}^n \triangleq \underset{\sim}{R}^{n-1} \circ \underset{\sim}{R}$$

3.1.3 模糊关系的自反性与传递性

在第 1 章曾介绍过 λ-截集的概念，自然地可把这个概念推广到模糊关系中来.

定义 3-5 设 $\underset{\sim}{R}$ 为 U 上的模糊关系，对 $\forall \lambda \in [0,1]$，普通关系

$$R_\lambda = \{(u,v) \mid \underset{\sim}{R}(u,v) \geqslant \lambda\}$$

称为模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的 λ-截关系.

定义 3-6 设 $\underset{\sim}{R}$ 为 U 到 U 的模糊关系.

(1) 对 $\forall (u,u) \in U \times U$，若 $\underset{\sim}{R}(u,u) = 1$，则 $\underset{\sim}{R}$ 称为模糊自反关系；

(2) 对 $\forall (u,v)$、(v,w)、$(u,w) \in U \times U$ 及 $\forall \lambda \in [0,1]$，有

$$\underset{\sim}{R}(u,v) \geqslant \lambda, \quad \underset{\sim}{R}(v,w) \geqslant \lambda \Rightarrow \underset{\sim}{R}(u,w) \geqslant \lambda,$$

则 $\underset{\sim}{R}$ 称为模糊传递关系.

由定义易知 $\underset{\sim}{R}$ 是传递的模糊关系，当且仅当它的每一个截关系 R_λ 是传递的普通关系.

定理 3-1 设 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times U)$，$\underset{\sim}{R}$ 为传递关系的充要条件为对任意的 u、v、$w \in U$，有

$$\underset{\sim}{R}(u,w) \geqslant \bigvee_{v\in U}(\underset{\sim}{R}(u,v) \wedge \underset{\sim}{R}(v,w)) \tag{3.1}$$

证 （必要性）设 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊传递关系，任取 $v_0 \in U$，令

$$\underset{\sim}{R}(u,v_0) \wedge \underset{\sim}{R}(v_0,w) = \lambda$$

由此得 $\underset{\sim}{R}(u,v_0) \geqslant \lambda$，$\underset{\sim}{R}(v_0,w) \geqslant \lambda$. 但 $\underset{\sim}{R}$ 为传递的，故 $\underset{\sim}{R}(u,w) \geqslant \lambda$，从而

$$\underset{\sim}{R}(u,w) \geqslant \underset{\sim}{R}(u,v_0) \wedge \underset{\sim}{R}(v_0,w)$$

由 $v_0 \in U$ 的任意性，得

$$\underset{\sim}{R}(u,w) \geqslant \bigvee_{v\in U}(\underset{\sim}{R}(u,v) \wedge \underset{\sim}{R}(v,w))$$

（充分性）设对 $\forall u、v、w \in U$ 式(3.1)成立，令

$$\underset{\sim}{R}(u,v) \wedge \underset{\sim}{R}(v,w) = \lambda$$

从而 $\underset{\sim}{R}(u,v) \geqslant \lambda$，$\underset{\sim}{R}(v,w) \geqslant \lambda$，但对任意 v 式(3.1)成立，故 $\underset{\sim}{R}(u,w) \geqslant \lambda$，即

$$\underset{\sim}{R}(u,v) \geqslant \lambda, \quad \underset{\sim}{R}(v,w) \geqslant \lambda \Rightarrow \underset{\sim}{R}(v,w) \geqslant \lambda,$$

所以 $\underset{\sim}{R}$ 为传递关系.

又根据关系合成的定义3-4，式（3.1）右边是 $\underset{\sim}{R}$ 与其自身合成关系的隶属函数 $(\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R})(u,w)$，因此式(3.1)又可写成 $\underset{\sim}{R}(u,w) \geqslant (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R})(u,w)$，亦即 $\underset{\sim}{R} \supseteq \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}$，故定理3-1可改写为如下定理.

定理3-2 $\underset{\sim}{R}$ 是模糊传递关系的充要条件为

$$\underset{\sim}{R} \supseteq \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R}\ (\text{即 } \underset{\sim}{R} \supseteq \underset{\sim}{R}^2)$$

3.1.4 两类特殊的模糊关系

模糊等价关系与模糊相似关系是两类特殊的模糊关系，它们在聚类分析中占有很重要的地位.

我们知道，若关系 R 具有

(1) 自反性 uRu；

(2) 对称性 $uRv \Rightarrow vRu$;

(3) 传递性 $uRv, vRw \Rightarrow uRw$.

则称关系 R 为等价关系.

仿此，可定义模糊等价关系.

定义 3-7 设 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times U)$，若 $\underset{\sim}{R}$ 是自反、对称、传递的模糊关系，则 $\underset{\sim}{R}$ 称为 U 上的一个模糊等价关系.

定理 3-3 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times U)$ 为模糊等价关系的充要条件是：对 $\forall \lambda \in [0,1]$，$R_\lambda$ 都是 U 上的普通等价关系.

证 对 $\forall u, v, w \in U$ 及 $\forall \lambda \in [0,1]$，由于

(1) 因为 $\underset{\sim}{R}(u,u) = 1 \geq \lambda \Leftrightarrow \underset{\sim}{R}(u,u) \geq \lambda \Leftrightarrow (u,u) \in R_\lambda$，所以 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊自反关系当且仅当 R_λ 为普通的自反关系.

(2) 因为 $(\underset{\sim}{R}(u,v) \geq \lambda \Rightarrow \underset{\sim}{R}(v,u) \geq \lambda) \Leftrightarrow ((u,v) \in R_\lambda \Rightarrow (v,u) \in R_\lambda)$，所以 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊对称关系当且仅当 R_λ 为普通对称关系.

(3) 因为 $\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R} \subseteq \underset{\sim}{R} \Leftrightarrow (\underset{\sim}{R}(u,v) \geq \lambda, \underset{\sim}{R}(v,w) \geq \lambda \Rightarrow \underset{\sim}{R}(u,w) \geq \lambda) \Leftrightarrow ((u,v) \in R_\lambda, (v,w) \in R_\lambda \Rightarrow (u,w) \in R_\lambda)$，所以 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊传递关系当且仅当 R_λ 为普通的传递关系.

故 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊等价关系的充要条件是 R_λ 为普通的等价关系.

在实际问题中，很多关系只满足自反性和对称性，我们把这种关系称之为模糊相似关系，下面是其数学定义.

定义 3-8 设 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times U)$，若 $\underset{\sim}{R}$ 是自反、对称的模糊关系，则 $\underset{\sim}{R}$ 称为 U 上的一个模糊相似关系.

3.2 模糊矩阵

同普通关系一样，当论域为有限时，模糊关系也可用矩阵表示，称此矩阵为模糊矩阵. 因此，讨论模糊矩阵及其运算对于研究模糊关系具有重要的实际意义.

3.2.1 模糊矩阵及其运算

定义 3-9 设 $r_{ij} \in [0,1]$ $(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$，矩阵 $R = (r_{ij})_{m\times n}$ 称为模糊矩阵.

例如

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

就是一个 2×3 模糊矩阵.

模糊矩阵是普通矩阵的特殊情况，普通矩阵的元素可为任意数，而模糊矩阵的元素仅取区间［0，1］上的实数.

模糊矩阵可表示有限域上的模糊关系，下面看两个例子.

例 3-3 论域 $U = V = \{$石头，剪刀，布$\}$，二人博弈．“胜”定义 1，“平局”定义 0.5，“负”定义 0，甲乙胜负关系 $\underset{\sim}{R}$ 用矩阵表示，则有

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{石} & \text{剪} & \text{布} \end{array} \\ R = \begin{array}{c} \text{石} \\ \text{剪} \\ \text{布} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

例 3-4 设身高的论域为 $U = \{140,150,160,170,180\}$（单位：cm），体重的论域为 $V = \{40,50,60,70,80\}$（单位：kg）．则由统计可得表 3-1 所示的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，它表示了人的身高与体重之间的相互关系.

表 3-1 身高-体重模糊关系 $\underset{\sim}{R}(u_i, v_j)$

u_i	v_j				
	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

用矩阵表示则有

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2\\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8\\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1\end{pmatrix}$$

为叙述方便，规定 $\mathscr{M}_{m\times n}$ 表示全体 m 行 n 列的模糊矩阵. 若 R 为一 $m\times n$ 模糊矩阵，则记为 $R\in\mathscr{M}_{m\times n}$.

定义 3-10 设 R、R^T、$S\in\mathscr{M}_{m\times n}$，其中 $R=(r_{ij})$，$R^T=(r_{ij}^T)$，$S=(s_{ij})$，对 $\forall i$、j，

(1) 若 $r_{ij}=s_{ij}$，则称为 R 与 S 相等，记为 $R=S$；

(2) 若 $r_{ij}\leqslant s_{ij}$，则称为 S 包含 R，记为 $S\supseteq R$；

(3) 若 $r_{ij}^T=r_{ji}$，则 R^T 称为 R 的转置矩阵.

定义 3-11 设 R、$S\in\mathscr{M}_{m\times n}$，其中 $R=(r_{ij})$，$S=(s_{ij})$，定义

$$R\cup S\triangleq(r_{ij}\vee s_{ij})$$

$$R\cap S\triangleq(r_{ij}\wedge s_{ij})$$

$$R^c\triangleq(1-r_{ij})$$

分别称为 R 与 S 的并、交及 R 的余矩阵.

例 3-5 设有模糊矩阵

$$R=\begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0.4 & 0.8\end{pmatrix}\qquad S=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$$

求 $R\cup S$、$R\cap S$、R^c 及 S^T.

解

$$R\cup S=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.4 & 0.8\end{pmatrix}\qquad R\cap S=\begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$$

$$R^c=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.6 & 0.2\end{pmatrix}\qquad S^T=\begin{pmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.5 & 0.7\end{pmatrix}$$

3.2.2 模糊矩阵的运算性质

模糊矩阵的运算有如下性质（假设运算都是可进行的）：

(1) 交换律　$R \cap S = S \cap R$，$R \cup S = S \cup R$

(2) 结合律　$(R \cup S) \cup T = R \cup (S \cup T)$.

$(R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T)$

(3) 分配律　$(R \cup S) \cap T = (R \cap T) \cup (S \cap T)$

$(R \cap S) \cup T = (R \cup T) \cap (S \cup T)$

(4) 幂等律　$R \cup R = R$，$R \cap R = R$

(5) 吸收律　$(R \cup S) \cap S = S, (R \cap S) \cup S = S$

(6) 复原律　$(R^c)^c = R$

(7) $O \cup R = R$，$O \cap R = O$，$E \cup R = E$

$E \cap R = R$，$O \subseteq R \subseteq E$

其中

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

分别称为零矩阵和全矩阵；

(8) $R \subseteq S \Leftrightarrow R \cup S = S \Leftrightarrow R \cap S = R$

(9) $(R \cup S)^c = R^c \cap S^c$，$(R \cap S)^c = R^c \cup S^c$

(10) 若 $R_1 \subseteq S_1, R_2 \subseteq S_2$，则

$(R_1 \cup R_2) \subseteq (S_1 \cup S_2)$，$(R_1 \cap R_2) \subseteq (S_1 \cap S_2)$

(11) $R \subseteq S \Leftrightarrow R^c \supseteq S^c$

(12) $(R^T)^T = R$

(13) $(R \cup S)^T = R^T \cup S^T$，$(R \cap S)^T = R^T \cap S^T$

(14) $R \subseteq S \Rightarrow R^T \subseteq S^T$

证明略.

交、并运算可推广到更一般的情况.

设有任意指标集 $T, R^{(t)} \in \mathscr{M}_{m\times n}(t\in T)$，定义

$$\bigcup_{t\in T} R^{(t)} \triangleq \left(\bigvee_{t\in T} r_{ij}^{(t)}\right)$$

$$\bigcap_{t\in T} R^{(t)} \triangleq \left(\bigwedge_{t\in T} r_{ij}^{(t)}\right)$$

于是有

(15) $S \cap \left(\bigcup_{t\in T} R^{(t)}\right) = \bigcup_{t\in T}(S \cap R^{(t)})$

(16) $S \cup \left(\bigcap_{t\in T} R^{(t)}\right) = \bigcap_{t\in T}(S \cup R^{(t)})$

定义 3-12 设 $R \in \mathscr{M}_{n\times n}$，若 $R \supseteq I$，则 R 称为模糊自反矩阵，其中

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

叫做幺矩阵.

包含 R 而又被任何包含 R 的自反矩阵所包含的自反矩阵，称为 R 的自反闭包，记作 $r(R)$.

定理 3-4 设 $R \in \mathscr{M}_{n\times n}$，则 $r(R) = R \cup I$.

证 先证 $R \cup I$ 为自反矩阵. 因为 $R \supseteq O, I \supseteq I$，所以 $R \cup I \supseteq O \cup I = I$，这表明 $R \cup I$ 为自反矩阵.

再证任意包含 R 的自反矩阵必包含 $R \cup I$. 设 Q 为任一包含 R 的自反矩阵，即 $R \subseteq Q$ 且 $I \subseteq Q$，故有 $R \cup I \subseteq Q$. 从而

$$r(R) = R \cup I$$

定义 3-13 设 $R \in \mathscr{M}_{n\times n}$，若 $R^T = R$，则 R 称为模糊对称矩阵.

包含 R 而又被任何包含 R 的对称矩阵所包含的对称矩阵，叫做 R 的对称闭包，记作 $s(R)$.

定理 3-5 设 $R \in \mathscr{M}_{n \times n}$，则 $s(R) = R \cup R^T$.

证 先证 $R \cup R^T$ 为对称矩阵. 因为

$$(R \cup R^T)^T = R^T \cup (R^T)^T = R^T \cup R = R \cup R^T$$

所以 $R \cup R^T$ 是对称矩阵.

再证任意包含 R 的对称矩阵包含 $R \cup R^T$. 设 Q 为任意包含 R 的对称矩阵，即 $R \subseteq Q$ 且 $Q^T = Q$，于是 $R^T \subseteq Q^T = Q$. 由此得 $R \cup R^T \subseteq Q \cup Q$，从而 $R \cup R^T \subseteq Q$. 故 $R \cup R^T = s(R)$.

3.2.3 模糊矩阵的乘积

下面是模糊矩阵乘积的定义.

定义 3-14 设 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$，$W = \{w_1, w_2, \cdots, w_l\}$，$Q = (q_{ik})_{n \times m}$，$R = (r_{kj})_{m \times l}$，定义

$$Q \circ R = S = (s_{ij})_{n \times l}$$

其中 $s_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m} (q_{ik} \wedge r_{kj})$. S 称为 Q 对 R 的模糊乘积（或称为 Q 对 R 的合成）.

模糊矩阵的乘法与普通矩阵的乘法相比较，运算过程类似，只不过是将实数加法改成取大运算“∨”，将实数乘法改成取小运算“∧”罢了.

模糊矩阵的乘积对应于模糊关系合成，即当论域为有限时，模糊关系的合成，可由模糊矩阵的乘积来实现.

例 3-6 设有模糊矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

求 $Q \circ R$.

解

$$Q \circ R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{pmatrix}$$

例 3-7 设 $\underset{\sim}{R}$ 为某家庭中子女与父母外貌相像的模糊关系，可表示为

$$R = \begin{matrix} & \text{父} & \text{母} \\ \text{子} & 0.8 & 0.2 \\ \text{女} & 0.1 & 0.6 \end{matrix}$$

$\underset{\sim}{S}$ 为该家庭中父母与祖父母外貌相像的模糊关系，可表示为

$$S = \begin{matrix} & \text{祖父} & \text{祖母} \\ \text{父} & 0.5 & 0.7 \\ \text{母} & 0.1 & 0 \end{matrix}$$

则 $$R \circ S = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

表示孙子女与祖父母外貌相像的模糊关系，也就是说在该家庭中孙子与祖父、祖母的相像程度分别为 0.5、0.7，而孙女与祖父母的相像程度只有 0.1.

仔细回味这一生活中常见的例子，我们就能明白模糊矩阵相乘时先取小，后取大的现实依据．因此有人认为取大取小运算法则是模糊数学的“特别美妙之处”.

模糊矩阵乘积的性质

(1) $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$

推论 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(Q \cup R) \circ S = (Q \circ S) \cup (R \circ S)$

$S \circ (Q \cup R) = (S \circ Q) \cup (S \circ R)$

证　只证 (2) 的第一式. 设 $Q \cup R = T, Q \circ S = M, R \circ S = N, T \circ S = L$, 于是

$$
\begin{aligned}
l_{ij} &= \bigvee_{k=1}^{m} (t_{ik} \wedge s_{kj}) = \bigvee_{k=1}^{m} [(q_{ik} \vee r_{ik}) \wedge s_{kj}] \\
&= \bigvee_{k=1}^{m} [(q_{ik} \wedge s_{kj}) \vee (r_{ik} \wedge s_{kj})] \\
&= \left[\bigvee_{k=1}^{m} (q_{ik} \wedge s_{kj})\right] \vee \left[\bigvee_{k=1}^{m} (r_{ik} \wedge s_{kj})\right] \\
&= m_{ij} \vee n_{ij}
\end{aligned}
$$

即

$$L = M \cup N$$

亦即

$$(Q \cup R) \circ S = (Q \circ S) \cup (R \circ S)$$

此性质可推广为

$$\left(\bigcup_{t \in T} Q^{(t)}\right) \circ R = \bigcup_{t \in T} (Q^{(t)} \circ R)$$

$$R \circ \left(\bigcup_{t \in T} Q^{(t)}\right) = \bigcup_{t \in T} (R \circ Q^{(t)})$$

但注意 $(Q \cap R) \circ S \neq (Q \circ S) \cap (R \circ S)$

$$S \circ (Q \cap R) \neq (S \circ Q) \cap (S \circ R)$$

例如设

$$Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

由于

$$
\begin{aligned}
(Q \cap R) \circ S &= \left[\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$(Q\circ S)\cap(R\circ S)=\left[\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\0.1 & 0.3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.9 & 0.2\\0.5 & 0.4\end{pmatrix}\right]\cap$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0.2\\0.2 & 0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.9 & 0.2\\0.5 & 0.4\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4\\0.3 & 0.3\end{pmatrix}\cap\begin{pmatrix}0.9 & 0.2\\0.2 & 0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.2\\0.2 & 0.2\end{pmatrix}$$

可见 $(Q\cap R)\circ S\neq(Q\circ S)\cap(R\circ S)$. 但有

(3) $(Q\cap R)\circ S\subseteq(Q\circ S)\cap(R\circ S)$

$S\circ(Q\cap R)\subseteq(S\circ Q)\cap(S\circ R)$

(4) $O\circ R=R\circ O=O,\quad I\circ R=R\circ I=R$

(5) 若 $Q\subseteq R$,则 $Q\circ S\subseteq R\circ S,\quad S\circ Q\subseteq S\circ R,\quad Q^n\subseteq R^n$

(6) $(Q\circ R)^T=R^T\circ Q^T,\quad (R^n)^T=(R^T)^n$

证 只证 (6), 设 $Q\circ R=S$, 由于

$$s_{ik}^T=s_{ki}=\bigvee_j(q_{kj}\wedge r_{ji})=\bigvee_j(q_{jk}^T\wedge r_{ij}^T)$$

$$=\bigvee_j(r_{ij}^T\wedge q_{jk}^T)$$

故 $$S^T=R^T\circ Q^T$$

又 $$(R^2)^T=(R\circ R)^T=R^T\circ R^T=(R^T)^2$$

依此类推, 可得 $(R^n)^T=(R^T)^n$.

3.3 模糊等价矩阵与模糊相似矩阵

3.3.1 λ-截矩阵

定义 3-15 设 $R\in\mathscr{M}_{m\times n}$, $R=(r_{ij})$, 对 $\forall\lambda\in[0,1]$, 记 $R_\lambda=({}_\lambda r_{ij})$, 其中

$${}_\lambda r_{ij}=\begin{cases}1\ , & r_{ij}\geqslant\lambda\\0\ , & r_{ij}<\lambda\end{cases}$$

则 $R_\lambda = ({}_\lambda r_{ij})$ 称为 R 的 λ-截矩阵.

R 的 λ-截矩阵 R_λ 对应于模糊关系的 λ-截关系. 显然 R_λ 的元素仅能是 0 或 1, 因此相应的 λ-截关系是一普通关系. 例如

$$R = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.5 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

则
$$R_{0.6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{0.7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

λ-截矩阵的性质

(1) 对 $\forall \lambda \in [0,1]$, $R \subseteq S \Leftrightarrow R_\lambda \subseteq S_\lambda$.

证 设 $R \subseteq S$, 欲证 $R_\lambda \subseteq S_\lambda$, 只需证 ${}_\lambda r_{ij} \leqslant {}_\lambda s_{ij}$. 已知 $R \subseteq S$, 即 $r_{ij} \leqslant s_{ij}$, 对 λ 分两种情况;

① $\lambda \leqslant r_{ij} \Rightarrow {}_\lambda r_{ij} = 1$, 而 $r_{ij} \leqslant s_{ij} \Rightarrow {}_\lambda s_{ij} = 1$, 于是 ${}_\lambda r_{ij} \leqslant {}_\lambda s_{ij}$;

② $\lambda > r_{ij} \Rightarrow {}_\lambda r_{ij} = 0$, 而 $r_{ij} \leqslant s_{ij}$, 此时或 $\lambda > s_{ij} \Rightarrow {}_\lambda s_{ij} = 0$, 或 $\lambda \leqslant s_{ij} \Rightarrow {}_\lambda s_{ij} = 1$, 于是 ${}_\lambda r_{ij} \leqslant {}_\lambda s_{ij}$.

故
$$R_\lambda \subseteq S_\lambda$$

再设 $R_\lambda \subseteq S_\lambda$, 来证明 $R \subseteq S$.

(反证法) 假设 $R \nsubseteq S$, 则必 $\exists (i_0, j_0)$, 使 $r_{i_0 j_0} > s_{i_0 j_0}$. 取 $\lambda = r_{i_0 j_0}$, 则有 ${}_\lambda r_{i_0 j_0} = 1$, ${}_\lambda s_{i_0 j_0} = 0$, 这与 $R_\lambda \subseteq S_\lambda$ 矛盾, 故 $R \subseteq S$.

(2) $(R \cup S)_\lambda = R_\lambda \cup S_\lambda$, $(R \cap S)_\lambda = R_\lambda \cap S_\lambda$.

证 只证第一式. 设 $R \cup S = C$, $R_\lambda \cup S_\lambda = D$, 从而有 $r_{ij} \vee s_{ij} = c_{ij}$, ${}_\lambda r_{ij} \vee {}_\lambda s_{ij} = d_{ij}$. 于是, 要证 $(R \cup S)_\lambda = R_\lambda \cup S_\lambda$. 只需证 ${}_\lambda c_{ij} = d_{ij}$. 分两种情况:

① ${}_\lambda c_{ij} = 1 \Leftrightarrow r_{ij} \vee s_{ij} \geqslant \lambda \Leftrightarrow r_{ij} \geqslant \lambda$ 或 $s_{ij} \geqslant \lambda \Leftrightarrow {}_\lambda r_{ij} = 1$ 或 ${}_\lambda s_{ij} = 1 \Leftrightarrow ({}_\lambda r_{ij}) \vee ({}_\lambda s_{ij}) = 1 \Leftrightarrow d_{ij} = 1$

② ${}_\lambda c_{ij} = 0 \Leftrightarrow r_{ij} \vee s_{ij} < \lambda \Leftrightarrow r_{ij} < \lambda$ 且 $s_{ij} < \lambda \Leftrightarrow {}_\lambda r_{ij} = 0$ 且 ${}_\lambda s_{ij} = 0 \Leftrightarrow ({}_\lambda r_{ij}) \vee ({}_\lambda s_{ij}) = 0 \Leftrightarrow d_{ij} = 0$

总之 ${}_\lambda c_{ij} = d_{ij}$, 故 $C_\lambda = D$, 即 $(R \cup S)_\lambda = R_\lambda \cup S_\lambda$ (另一式请

读者自证).

(3) $(Q\circ R)_\lambda = Q_\lambda \circ R_\lambda$

证 设 $S = Q\circ R$. 要证 $(Q\circ R)_\lambda = Q_\lambda \circ R_\lambda$，即要证 ${}_\lambda s_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m}({}_\lambda q_{ik} \wedge {}_\lambda r_{kj})$. 分两种情况:

① ${}_\lambda s_{ij} = 1 \Leftrightarrow s_{ij} \geqslant \lambda \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{m}(q_{ik} \wedge r_{kj}) \geqslant \lambda \Leftrightarrow (\exists k)(q_{ik} \wedge r_{kj}) \geqslant \lambda \Leftrightarrow (\exists k)(q_{ik} \geqslant \lambda$ 且 $r_{kj} \geqslant \lambda) \Leftrightarrow (\exists k)({}_\lambda q_{ik} = 1$ 且 ${}_\lambda r_{kj} = 1) \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{m}({}_\lambda q_{ik} \wedge {}_\lambda r_{kj}) = 1$

② ${}_\lambda s_{ij} = 0 \Leftrightarrow {}_\lambda s_{ij} \neq 1 \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{m}({}_\lambda q_{ik} \wedge {}_\lambda r_{kj}) \neq 1 \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{m}({}_\lambda q_{ik} \wedge {}_\lambda r_{kj}) = 0$

故
$$ {}_\lambda s_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m}({}_\lambda q_{ik} \wedge {}_\lambda r_{kj}) $$
即
$$ (Q\circ R)_\lambda = Q_\lambda \circ R_\lambda $$

(4) $(R^T)_\lambda = (R_\lambda)^T$

3.3.2 模糊传递矩阵

定义 3-16 设 $R \in \mathscr{M}_{n\times n}$，若 $R^2 \subseteq R$，则 R 称为模糊传递矩阵.

包含 R 而又被任一包含 R 的传递矩阵所包含的传递矩阵，称为 R 的传递闭包，记作 $t(R)$.

关于传递闭包有如下结论:

定理 3-6 对任意 $R \in \mathscr{M}_{n\times n}$，总有

$$ t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^m \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k $$

证 要证明 $t(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$，就是要证明 $\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$ 是传递的，同时对任意传递矩阵 $Q \supseteq R$，有 $Q \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$.

因为
$$ \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k\right)\circ\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(R^k \circ \bigcup_{j=1}^{\infty} R^j\right) $$
$$ = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(R^k \circ R^j) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} R^{k+j} $$

$$= \bigcup_{m=2}^{\infty} R^m \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

所以 $\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$ 是传递的.

设 $Q \in \mathscr{M}_{n\times n}$ 为任意传递矩阵且 $Q \supseteq R$. 因为 Q 是传递的,所以 $Q^2 \subseteq Q, \cdots, Q^k \subseteq Q$,又由 $Q \supseteq R$,有 $Q^k \supseteq R^k$ 从而有 $Q \supseteq Q^k \supseteq R^k$,即 $Q \supseteq R^k$,再由 k 的任意性得 $Q \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$.

于是有
$$t(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

定理 3-7 设 $R \in \mathscr{M}_{n\times n}$,则 $t(R) = \bigcup_{m=1}^{n} R^m$

证明略.

此定理的重要性在于,对有限域 U 上的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$,如果其对应的模糊矩阵为 n 阶方阵 R,则它的传递闭包只需 n 次并运算即可求出.

3.3.3 模糊等价矩阵与模糊相似矩阵

定义 3-17 设 $R \in \mathscr{M}_{n\times n}$,若 R 是自反、对称、传递的模糊矩阵,则 R 称为模糊等价矩阵.

例 3-8 设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $\underset{\sim}{R}$ 是 U 上的模糊关系,可表示为

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

求证 R 是 U 上的模糊等价矩阵.

证 显然 R 是自反、对称的,又经计算知

$$R \circ R = R^2 \subseteq R$$

所以 R 是传递的. 故 R 为模糊等价矩阵, $\underset{\sim}{R}$ 为模糊等价关系.

关于等价矩阵有两个重要的结论.

定理 3-8 $R\in\mathscr{M}_{n\times n}$ 是等价矩阵的充要条件是:对 $\forall\lambda\in[0,1]$,R_λ 都是等价的普通矩阵.

此定理即为有限域上的定理 3-3, 它说明有限域上的模糊等价关系确定之后, 对给定的 $\lambda\in[0,1]$,便可相应得到一个普通等价关系 R_λ,于是由 R_λ 便可以决定一个 λ 水平的分类. 显然,不同的 λ 对应着不同的分类,当 λ 从 1 降到 0 时,分类也随之变化,形成一个动态的图像. 那么,由于 λ 的变化而分出的类有何特征呢? 这就是下面的定理要说明的问题.

定理 3-9 若 $0\leqslant\lambda<\mu\leqslant 1$,则 R_μ 所分出的每一个类必是 R_λ 所分出的子类.

证 $({}_\mu r_{ij}=1\Leftrightarrow r_{ij}\geqslant\mu)\Rightarrow(r_{ij}\geqslant\lambda\Leftrightarrow{}_\lambda r_{ij}=1)$,亦即 ${}_\mu r_{ij}=1\Rightarrow{}_\lambda r_{ij}=1(\lambda<\mu)$.

这说明, 若 i, j 按 R_μ 归为一类, 则按 R_λ 亦必归为一类, 从而证明了定理的正确性.

此定理指出 λ 越大, 类分得越细. 因此若要把问题分得细些, 只须增大 λ 即可.

例 3-9 试把例 3-8 中的 U 分类.

解 例 3-8 中 U 上的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4\\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1\end{pmatrix}$$

在例 3-8 中已证明 R 是等价矩阵, 现在利用 λ 截矩阵 R_λ 对 U 分类. 所谓利用 R_λ 对 U 分类是指: 令 λ 由 1 降至 0, 写出相应的 R_λ, 然后按 R_λ 分类, u_i 与 u_j 归为同类等价于 ${}_\lambda r_{ij}=1$.

(1) 令 $\lambda=1$, 则

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

此时分为五类：$\{u_1\}, \{u_2\}, \{u_3\}, \{u_4\}, \{u_5\}$，亦即每一个元素为一类. 这是最细的分类.

(2) 令 $\lambda = 0.8$，则

$$R_{0.8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

此时分为四类：$\{u_1, u_3\}, \{u_2\}, \{u_4\}, \{u_5\}$.

(3) 令 $\lambda = 0.6$，则

$$R_{0.6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

此时分为三类：$\{u_1, u_3\}$、$\{u_2\}$、$\{u_4, u_5\}$.

(4) 令 $\lambda = 0.5$，则

$$R_{0.5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

此时分为二类：$\{u_1, u_3, u_4, u_5\}$，$\{u_2\}$.

(5) 令 $\lambda = 0.4$，则 $R_{0.1} = E$，此时全归为一类 $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，即分类为"最粗".

上述分类过程可用一个动态的聚类图（见图 3-1）直观表示.

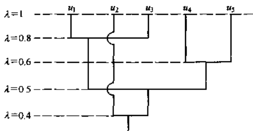


图 3-1 聚类图

定义 3-18 设 $R \in \mathscr{M}_{n\times n}$，若 R 是自反、对称的模糊矩阵，则 R 称为模糊相似矩阵.

例如

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

就是一个相似矩阵. 易见，模糊等价关系是相似关系的特殊情况. 模糊等价矩阵可以进行分类，那么如何利用模糊相似矩阵进行分类呢？可先把它进行改造，使之成为模糊等价矩阵，然后进行分类.

定理 3-10 设 $R \in \mathscr{M}_{n\times n}$ 为相似矩阵，则存在最小的自然数 $k \leq n$，使得 $t(R) = R^k (k \leq n)$ 且对于一切大于 k 的自然数 l，有 $R^l = R^k$.

证 设 $R = (r_{ij})_{n\times n}$ 为相似矩阵，由于其自反性，于是有 $r_{ii} = 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 考虑 $R \circ R = R^2 = (c_{ij})_{n\times n}$，其中

$$c_{ij} = \bigvee_{p=1}^{n} (r_{ip} \wedge r_{pj}) \geqslant r_{ii} \wedge r_{ij} = r_{ij}$$

即 $r_{ij} \leqslant c_{ij}$，故 $R \subseteq R^2$. 利用模糊矩阵合成的性质，得

$$R^3 = R^2 \circ R \supseteq R \circ R = R^2$$

$$R^k = R^{k-2} \circ R^2 \supseteq R^{k-2} \circ R = R^{k-1}$$

从而有非降序列

$$R \subseteq R^2 \subseteq \cdots \subseteq R^k$$

于是由定理3-7及上式知：$t(R) = \bigcup_{m=1}^{n} R^m = R^n$. 又由于 n 是一个有限的自然数，因此必定存在自然数 $k \leqslant n$，使得 $t(R) = R^k$（当非降矩阵序列 $R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \cdots$ 从中间某一个 $i(\leqslant n)$ 起，有 $R^i = R^{i+1} = \cdots = R^n$ 时，取 $k = i$).

对于任意的大于 k 的自然数 l，因为

$$t(R) = R^k \subseteq R^l \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} R^m = t(R)$$

所以 $$R^l = R^k$$

由此定理，我们可得出求相似矩阵传递闭包的简捷方法如下：计算

$$R \to R^2 \to R^4 \to \cdots \to R^{2^k} \to R^{2^{k+1}}$$

直至出现 $R^{2^k} = R^{2^{k+1}}$，则 $t(R) = R^{2^k}$. 此方法叫做逐次平方法.

因为 $$2^{k-1} < n \leqslant 2^k$$

$$k - 1 < \log_2 n \leqslant k$$

所以 $$k < \log_2 n + 1$$

这表明用逐次平方法，至多只需要 $\log_2 n + 1$ 步便可得到传递闭包.

定理3-11 若 $R \in \mathscr{M}_{n \times n}$ 为一相似矩阵，则 R 的传递闭包 $t(R) = R^k$ 必是模糊等价矩阵.

证 (1) 若 $R \supseteq I$,则 $R^k \supseteq I^k = I$,即 $R^k = t(R)$ 是自反的;

(2) 若 $R^T = R$,则 $[t(R)]^T = (R^k)^T = (R^T)^k = R^k = t(R)$,即 $t(R) = R^k$ 是对称的;

(3) 由传递闭包的定义,$t(R) = R^k$ 是传递的.

因此,$t(R) = R^k$ 是模糊等价矩阵.

定理3-10 和定理3-11 表明,用逐次平方法可以把一个模糊相似矩阵改造为一个模糊等价矩阵.

例 3-10 把相似矩阵

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

改造成为一等价矩阵.

解

$$R \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix} = R^2$$

$$R^2 \circ R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix} = R^4 = R^2$$

于是 R^2 就是所求的等价矩阵.

3.4 模糊图

模糊图论是模糊数学中的一个新分支,它是在普通图论的基础上建立起来的. 下面我们给出模糊图的定义.

定义 3-19 设 $G=(V,E)$ 为一无向图，其中 V 是有限结点集，$E\in\mathscr{P}(V\times V)$ 为边集，无序结点对 $(v_i,v_j)\in E$ 表示该边与 v_i,v_j 两结点相关联. 对于模糊集 $\underset{\sim}{V}\in\mathscr{F}(V)$ 及模糊关系 $\underset{\sim}{E}\in\mathscr{F}(V\times V)$，若对 $\forall v_i、v_j\in V$，有

$$\underset{\sim}{E}(v_i,v_j)\leqslant\underset{\sim}{V}(v_i)\wedge\underset{\sim}{V}(v_j)$$

则二元有序组 $(\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E})$ 称为一模糊图，记为 $\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E})$. 而相应的普通图 $G=(V,E)$ 称为模糊图 $\underset{\sim}{G}$ 的奠基图，$\underset{\sim}{E}(v_i,v_j)$ 称为 (v_i,v_j) 的权重.

例 3-11 设 $G=(V,E)$ 为一普通图，其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_4),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5),(v_3,v_3)\}$（$(v_i,v_j)$ 均为无序结点对），而

$$\underset{\sim}{V}=\frac{0.8}{v_1}+\frac{0.7}{v_2}+\frac{0.6}{v_3}+\frac{0.9}{v_4}+\frac{1}{v_5}$$

$$\underset{\sim}{E}=\frac{0.6}{(v_1,v_2)}+\frac{0.8}{(v_1,v_4)}+\frac{0.5}{(v_2,v_3)}+\frac{0.8}{(v_4,v_5)}+\frac{0.5}{(v_3,v_3)}$$

分别为 V 上的模糊集和 $V\times V$ 上的模糊关系. 容易验证，任意的 $(v_i,v_j)\in E$，都有

$$\underset{\sim}{E}(v_i,v_j)\leqslant\underset{\sim}{V}(v_i)\wedge\underset{\sim}{V}(v_j)$$

故 $\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E})$ 为一模糊图(见图 3-2(a)，其奠基图为图 3-2(b))

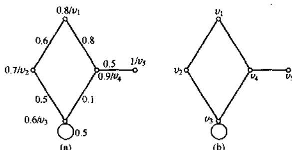


图 3-2 模糊图及其奠基图

定义 3-20 若 $V_1 \subseteq V_2, \underset{\sim}{E}_1 \subseteq \underset{\sim}{E}_2$，则 $\underset{\sim}{G}_1 = (\underset{\sim}{V}_1, \underset{\sim}{E}_1)$ 称为 $\underset{\sim}{G}_2 = (\underset{\sim}{V}_2, \underset{\sim}{E}_2)$ 的一个模糊子图，也称$\underset{\sim}{G}_2$ 包含$\underset{\sim}{G}_1$，记为$\underset{\sim}{G}_2 \supseteq \underset{\sim}{G}_1$.

定义 3-21 对于模糊图 $\underset{\sim}{G} = (\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E})$ 及 $\forall \lambda \in [0,1]$，普通图 (V_λ, E_λ) 称为模糊图 $\underset{\sim}{G}$ 的λ-截图，记为$G_\lambda = (V_\lambda, E_\lambda)$，其中$V_\lambda, E_\lambda$ 为 $\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E}$ 的λ-截集.

显然 G_0 为模糊图 $\underset{\sim}{G}$ 的一个奠基图. 可以证明，若 $\underset{\sim}{G}_1 \subseteq \underset{\sim}{G}_2$，则对于 $\forall \lambda \in [0,1]$，有$(\underset{\sim}{G}_1)_\lambda \subseteq (\underset{\sim}{G}_2)_\lambda$.

定义 3-22 设 $\underset{\sim}{G}$ 为一模糊图，若其奠基图是连通图，则 $\underset{\sim}{G}$ 称为模糊连通图.

定义 3-23 设 $\underset{\sim}{T}$ 是模糊图 $\underset{\sim}{G}$ 的一个模糊子图，若其中 $\underset{\sim}{G}$ 的奠基图 G_0 的生成树 T 等于 $\underset{\sim}{T}$ 的奠基图 T_0，即 $T = T_0$，则 $\underset{\sim}{T}$ 称为模糊图 $\underset{\sim}{G}$ 的一棵生成树.

定义 3-24 设 $\underset{\sim}{G} = (\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E})$ 为模糊连通图，若存在 $\underset{\sim}{G}$ 的一棵生成树 $\underset{\sim}{T}^*$，对于 $\underset{\sim}{G}$ 的任一棵生成树 $\underset{\sim}{T}$，都有

$$\sum_{e \in \underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{T})} \underset{\sim}{E}(e) \leqslant \sum_{e \in \underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{T}^*)} \underset{\sim}{E}(e)$$

（其中 $\underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{T}), \underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{T}^*)$ 分别为 $\underset{\sim}{T}$ 和 $\underset{\sim}{T}^*$ 中边的全体），那么 $\underset{\sim}{T}^*$ 称为 $\underset{\sim}{G}$ 的最大生成树，简称最大树.

由定义可知最大树不唯一.

下面给出一种求 $\underset{\sim}{G}$ 最大生成树的方法：设 $\underset{\sim}{G}$ 为模糊连通图，首先在 $\underset{\sim}{G}$ 中任取一个回路，去掉其中 $\underset{\sim}{E}(e)$ 最小的边e，然后再任取第二个回路，同样去掉其中 $\underset{\sim}{E}(e)$ 最小的边 e，如此继续下去，直至将全部回路删除，所得到的一棵树便为 $\underset{\sim}{G}$ 的最大生成树.

例 3-12 设 $\underset{\sim}{G} = (\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E})$ 为模糊连通图，其中

$$\underset{\sim}{V} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_5}$$

$$\underset{\sim}{E} = \frac{0.85}{(v_1,v_2)} + \frac{0.65}{(v_1,v_3)} + \frac{0.25}{(v_1,v_4)} + \frac{0.15}{(v_1,v_5)}$$

$$+ \frac{0.85}{(v_2,v_3)} + \frac{0.25}{(v_2,v_5)} + \frac{0.95}{(v_3,v_4)} + \frac{0.15}{(v_4,v_5)}$$

求 $\underset{\sim}{G}$ 的最大树.

解 $\underset{\sim}{G}$ 的图形如图 3-3(a) 所示．首先取一回路(v_1,v_2,v_5,v_1),显然其中 $\underset{\sim}{E}(v_1,v_5)=0.15$最小,于是去掉边$(v_1,v_5)$. 再取回路$(v_1,v_3,v_4,v_1)$,易见其中 $\underset{\sim}{E}(v_1,v_4)=0.25$最小,再去掉边$(v_1,v_4)$. …… 最后得 $\underset{\sim}{G}$ 的最大生成树 $\underset{\sim}{T}^*=(\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E}^*)$,其中

$$\underset{\sim}{E}^* = \frac{0.85}{(v_1,v_2)} + \frac{0.85}{(v_2,v_3)} + \frac{0.95}{(v_3,v_4)} + \frac{0.25}{(v_2,v_5)}$$

$\underset{\sim}{T}^*$的图形如图 3-3 (b) 所示.

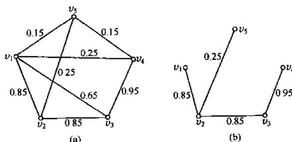


图 3-3 模糊图及其最大生成树

特别地，当 $\underset{\sim}{E}$ 为相似模糊关系时，我们常用 Kruskal 法和 Prim 法来求模糊图 $\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E})$的最大树.

3.4.1 Kruskal 法

先画出所有顶点 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$,再写出 $\underset{\sim}{E}$ 的相似矩阵 $E=(e_{ij})_{n\times n}$,然后按 e_{ij} 从大到小的顺序依次画出边，标上权重，

要求不产生回路，直到所有顶点连通为止，就得到一棵最大树.

3.4.2 Prim 法

(1) 任取 $v_{i1} \in V$,找 $v_{i2} \in V \setminus \{v_{i1}\}$,使

$$\underset{\sim}{E}(v_{i1}, v_{i2}) = \max_{v_i \in V \setminus \{v_{i1}\}} \{\underset{\sim}{E}(v_{i1}, v_i)\}$$

v_{i2} 是 V 中与 v_{i1} 具有关系 $\underset{\sim}{E}$ 的程度为最大的元素,画出结点 v_{i1} 与 v_{i2} 并连边,标上权重 $\underset{\sim}{E}(v_{i1}, v_{i2})$.

(2) 找 $v_{i3} \in V \setminus \{v_{i1}, v_{i2}\}$,使

$$\max(\underset{\sim}{E}(v_{i1}, v_{i3}), \underset{\sim}{E}(v_{i2}, v_{i3})) = \max_{v_i \in V \setminus \{v_{i1}, v_{i2}\}} (\underset{\sim}{E}(v_{i1}, v_i), \underset{\sim}{E}(v_{i2}, v_i))$$

v_{i3} 是 V 中与 v_{i1} 或 v_{i2} 具有关系 $\underset{\sim}{E}$ 的程度为最大的元素. 画出顶点 v_{i3},并连接相应的边,标上相应的权重.

(3) 找 $v_{ik} \in V \setminus \{v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{i,k-1}\}$,使 v_{ik} 与这 $k-1$ 个元素之一具有关系 $\underset{\sim}{E}$ 的程度最大,再画点,连边,标上权重.

经过有限步，总可将 V 中全部元素连接起来得到一棵最大树.

例 3-13 设 $\underset{\sim}{V} = 1/\text{I} + 1/\text{II} + 1/\text{III} + 1/\text{IV} + 1/\text{V}$, $\underset{\sim}{E}$ 为一相似模糊关系，其矩阵为

$$E = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ & & 1 & 0.3 & 0.1 \\ & & & 1 & 0.6 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

求模糊图 $\underset{\sim}{G} = (\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E})$ 的最大树.

解 (1) 用 Kruskal 法

画出五个结点Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ.由 E 知相似矩阵的最大元为 $0.8 = \underset{\sim}{E}(\text{I},\text{III})$；次大元为 $0.6 = \underset{\sim}{E}(\text{IV},\text{V})$，再画边(Ⅳ,Ⅴ)；余下的最大元为 $0.5 = \underset{\sim}{E}(\text{I},\text{IV})$，次大元为 $0.4 = \underset{\sim}{E}(\text{II},\text{V})$，再画边(Ⅰ,Ⅳ)和(Ⅱ,Ⅴ)，至此所有结点都被连到. 于是求得最大树为图3-4.

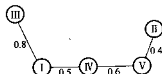


图 3-4 最大树

(2) 用 Prim 法

先取Ⅰ，在 E 的第一行中找不在主对角线上的最大数，找得为 $0.8 = \underset{\sim}{E}(\text{I},\text{III})$，画出结点 Ⅰ,Ⅲ,并连边(Ⅰ,Ⅲ)；在{Ⅱ,Ⅳ,Ⅴ}中与 Ⅰ 连结的边的最大数是 $0.5 = \underset{\sim}{E}(\text{I},\text{IV})$，与Ⅲ连结的边的最大数是 $0.3 = \underset{\sim}{E}(\text{III},\text{IV})$，因 $0.5 > 0.3$，取Ⅳ，画出结点Ⅳ，连边(Ⅰ,Ⅳ)；再在{Ⅱ,Ⅴ}中找与{Ⅰ,Ⅲ,Ⅳ}连结的最大数为 $0.6 = \underset{\sim}{E}(\text{IV},\text{V})$，画出结点Ⅴ，连边(Ⅳ,Ⅴ)；最后，Ⅱ与{Ⅰ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ}连结的最大边为(Ⅱ,Ⅴ)，$\underset{\sim}{E}(\text{II},\text{V}) = 0.4$，画出边(Ⅱ,Ⅴ)，于是得最大树（见图3-4）.

习 题 3

1. 设 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$，$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$，$R, S$ 均为 X 到 Y 的模糊关系；且

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 1 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.9 & 1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

(1) 求 $R \cup S, R \cap S, R^c$；

(2) 求隶属度 $(R \cup S)(x_1, y_3)$，$(R \cap S)(x_3, y_4)$，$R^c(x_2, y_1)$

(3) 求 λ-截矩阵 $R^c_{0.8}$，$(R \cap S)_{0.5}$.

2. 设 $\underset{\sim}{R}^{(1)}, \underset{\sim}{R}^{(2)} \in \mathscr{F}(X \times X)$（$X$ 为实数域），且

$$\underset{\sim}{R}^{(1)}(x,y) = e^{-(x-y)^2}, \quad \underset{\sim}{R}^{(2)}(x,y) = e^{-(x-y)}$$

求 $(\underset{\sim}{R}^{(1)} \cup \underset{\sim}{R}^{(2)})^c(3,2)$, $(\underset{\sim}{R}^{(1)} \cap (\underset{\sim}{R}^{(1)} \cup \underset{\sim}{R}^{(2)})^c)(3,2)$.

3. 设 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, 已知 $R^{(1)}$ 为 X 到 Y 的模糊关系, $R^{(2)}$ 为 Y 到 Z 的模糊关系, 且

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0 & 1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad R^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 1 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.7 & 1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

求 $R^{(1)} \circ R^{(2)}$, $(R^{(1)})^c \circ R^{(2)}$, $(R^{(1)} \circ (R^{(2)})^c)_{0.7}$; $(R^{(1)})_{0.7} \circ (R^{(2)})_{0.7}$.

4. 在中医诊断中存在模糊关系

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{寒} \\ \text{热} \\ \text{虚} \\ \text{实} \end{matrix}, \quad R^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{自汗} \\ \text{恶寒} \\ \text{咳嗽} \\ \text{喘} \end{matrix}$$

$R^{(1)}$ 的列依次为：自汗 恶寒 咳嗽 喘；$R^{(2)}$ 的列依次为：肺 心

建立 {寒, 热, 虚, 实} 等症状与 {肺, 心} 间的模糊关系 $R^{(1)} \circ R^{(2)}$.

5. 设 $X = Y = Z$ 为实数域, $\underset{\sim}{R}^{(1)} \in \mathscr{F}(X \times Y)$, $\underset{\sim}{R}^{(2)} \in \mathscr{F}(Y \times Z)$, 且

$$\underset{\sim}{R}^{(1)}(x,y) = e^{-k(x-y)^2}, \quad \underset{\sim}{R}^{(2)}(y,z) = e^{-k(y-z)^2} \quad (k \geqslant 1)$$

写出 $\underset{\sim}{R}^{(1)} \circ \underset{\sim}{R}^{(2)}$, $(\underset{\sim}{R}^{(1)} \circ \underset{\sim}{R}^{(2)})^c$ 的隶属函数.

6. 设

$$R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

证明: $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$.

7. 证明:

(1) 若 R 是可传递的, 则 R^T, R^n 都是可传递的;

(2) 若 $R^{(1)}$ 和 $R^{(2)}$ 是可传递的, 则 $R^{(1)} \cap R^{(2)}$ 也是可传递的.

8. 下列模糊关系哪些是自反的, 哪些是对称的, 哪些是可传递的, 哪些是模糊等价关系:

$$R^{(1)}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&0.9&0.7&0.3\\0&0&0&0.7&0.3\\0&0&0&0&0.3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad R^{(2)}=\begin{pmatrix}0&0.3&1&0&0.5\\0.3&0.2&0&0.8&0.1\\1&0&0&0.2&1\\0&0.8&0.2&1&0.4\\0.5&0.1&1&0.4&0.4\end{pmatrix}$$

$$R^{(3)}=\begin{pmatrix}1&0.5&0.5&0&0.7\\0&1&0.7&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0.3&0.3&1&0\\1&0.5&0.5&0&1\end{pmatrix},\quad R^{(4)}=\begin{pmatrix}0&0&0.3&0.2&0\\0.6&1&0.8&1&0.2\\0.2&0&1&0.8&0.3\\0&0&0&1&0\\1&0&0.2&0.6&0\end{pmatrix}$$

$$R^{(5)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0.4\\0&1&0.9&1&0\\0&0.9&1&0.9&0\\0&1&0.9&1&0\\0.4&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad R^{(6)}=\begin{pmatrix}0&0.1&0&1&0.8\\0.1&0&0&0&0.6\\0&0&0&0.4&1\\1&0&0.4&0&1\\0.8&0.6&1&1&0\end{pmatrix}$$

9. 举例说明：R，Q 都是模糊等价矩阵，但 $R\cup Q$ 不是模糊等价矩阵.

10. 举例说明：R，Q 都是模糊相似矩阵，但 $R\circ Q$ 不是模糊相似矩阵.

11. 甲，乙，丙，丁四人面貌“彼此相像”的模糊关系为

$$R=\begin{pmatrix}1&0.5&0.4&0.8\\0.5&1&0.7&0.5\\0.4&0.7&1&0.6\\0.8&0.5&0.6&1\end{pmatrix}$$

求传递闭包 $t(R)$，并把四人分类.

12. 求 11 题中与 R 对应的模糊图的最大树.

第 4 章　模糊关系方程

模糊关系方程在模糊数学理论及其应用中都是非常重要的. 本章主要介绍模糊关系方程的解法.

4.1　模糊关系方程

定义 4-1　设 U、V、W 是给定的非空论域, $\underset{\sim}{R}$ 、$\underset{\sim}{S}$ 分别为 U 到 V 和 U 到 W 的模糊关系, 若未知模糊关系 $\underset{\sim}{X} \in \mathscr{F}(V \times W)$, 满足等式

$$\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{S}$$

则上式称为模糊关系方程. 满足此式的模糊关系 $\underset{\sim}{X}$ 称为模糊关系方程的解, 而求 $\underset{\sim}{X}$ 的过程称为求解模糊关系方程. 当方程 $\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{S}$ 有解时, 称方程是相容的, 否则称方程为不相容的.

由前章知, 当论域有限时, 模糊关系可用矩阵表示, 相应地有限域上的模糊关系方程就成为模糊矩阵方程. 从应用的角度出发, 本章只讨论模糊矩阵方程.

模糊矩阵方程的形式有两种类型:

Ⅰ. 已知模糊矩阵 $A \in \mathscr{M}_{m\times n}$, $B \in \mathscr{M}_{m\times l}$, 求模糊矩阵 $X \in \mathscr{M}_{n\times l}$, 使得

$$A \circ X = B \tag{4.1}$$

成立.

Ⅱ. 已知模糊矩阵 $A \in \mathscr{M}_{n\times l}$, $B \in \mathscr{M}_{m\times l}$, 求模糊矩阵 $X \in \mathscr{M}_{m\times n}$, 使得

$$X \circ A = B \tag{4.2}$$

成立.

仅就方程求解而言，式（4.2）和（4.1）实际上是一样的．事实上，对式（4.2）两端求转置则得

$$A^T \circ X^T = B^T$$

这即属于式（4.1）的形式，故只需讨论式（4.1）的求解问题，即讨论形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ml} \end{pmatrix}$$

的方程．

为叙述方便，我们引进记号

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj})^T$$

$$B_j = (b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{mj})^T \qquad (j = 1, 2, \cdots, l)$$

则式（4.1）可用下列分块模糊矩阵的形式表示，

$$A \circ (X_1, X_2, \cdots, X_l) = (B_1, B_2, \cdots, B_l)$$

此方程的求解问题可归结为下面的简单模糊矩阵方程

$$A \circ X_j = B_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, l) \tag{4.3}$$

的求解问题．

综上所述，我们只要把式（4.3）的求解问题讨论清楚，那么Ⅰ型和Ⅱ型模糊方程的求解问题就可以解决．因此，本章后面的几节主要讨论形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

的模糊矩阵方程的解法.

4.2 模糊矩阵方程的一般解法

我们先从最简单的一元一次模糊方程及一元一次模糊不等式入手.

一元一次模糊方程是指方程

$$a \wedge x = b$$

其中 a、$b \in [0,1]$ 为已知,$x \in [0,1]$ 为未知(此处的 x,a 和 b 可分别看作是一行一列的模糊矩阵(x),(a) 和(b)).

显然,当 $a < b$ 时,方程无解,记为 $X = \varnothing$;

当 $a > b$ 时,方程有唯一解 $x = b$;

当 $a = b$ 时,方程有无穷个解,$[b, 1]$ 闭区间上任意的一个实数都是方程的解,实际上 $[b, 1]$ 是方程的解的集合,简称解集,记为 $X = [b,1]$.

我们引进一个算符 ε,将满足一元一次模糊方程的解写成 $X = a\varepsilon b$.

即
$$X = a\varepsilon b = \begin{cases} b & a > b \\ [b,1] & a = b \\ \varnothing & a < b \end{cases}$$

一元一次模糊不等式是指

$$a \wedge x \leqslant b$$

其中 a、$b \in [0,1]$ 为已知,$x \in [0,1]$ 为未知.不难看出它的解是

$$X = \begin{cases} [0,b] & a > b \\ [0,1] & a \leqslant b \end{cases}$$

同样也引进算符 $\hat{\varepsilon}$,把一元一次模糊不等式的解写成

$$X = a\,\hat{\varepsilon}\,b = \begin{cases} [0,b] & a > b \\ [0,1] & a \leqslant b \end{cases}$$

从这里我们可以看出模糊矩阵方程是否有解与矩阵 A, B 的元素之间存在着内在的联系，在方程有解时，它的解与矩阵 B 是密切相关的.

易知，式（4.4）与线性方程组（称为模糊线性方程组）

$$\begin{cases}(a_{11} \wedge x_1) \vee (a_{12} \wedge x_2) \vee \cdots \vee (a_{1n} \wedge x_n) = b_1 \\ (a_{21} \wedge x_1) \vee (a_{22} \wedge x_2) \vee \cdots \vee (a_{2n} \wedge x_n) = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ (a_{m1} \wedge x_1) \vee (a_{m2} \wedge x_2) \vee \cdots \vee (a_{mn} \wedge x_n) = b_m\end{cases} \tag{4.5}$$

是等价的. 为了求此方程组的解集，先讨论它的第 i 个方程

$$(a_{i1} \wedge x_1) \vee (a_{i2} \wedge x_2) \vee \cdots \vee (a_{in} \wedge x_n) = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{4.6}$$

有解的条件.

容易看出方程（4.6）有解的充要条件是至少存在一个 x_k，满足 n 元模糊线性方程组

$$\begin{cases}a_{i1} \wedge x_1 = b_i \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ a_{ik} \wedge x_k = b_i \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ a_{in} \wedge x_n = b_i\end{cases}$$

中第 k 个方程，同时使 n 个模糊不等式

$$a_{i1} \wedge x_1 \leqslant b_i$$
$$a_{i2} \wedge x_2 \leqslant b_i$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{in} \wedge x_n \leqslant b_i$$

都成立. 于是有如下结论.

定理 4-1 n 元模糊线性方程（4.6）有解的充要条件是存在

$k(1 \leqslant k \leqslant n)$,使得 $a_{ik} \geqslant b_i$.

证 充分性很显然，现证必要性.

(1) 当 $b_i = 0$ 时，结论显然正确；

(2) 当 $b_i > 0$ 时，（用反证法）若对任意的 k 都有 $a_{ik} < b_i$，则 $\forall x_k \in [0,1]$ 都有 $a_{ik} \wedge x_k < b_i$，从而

$$\bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge x_k) < b_i$$

这与式（4.6）有解相矛盾，故存在 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 使 $a_{ik} \geqslant b_i$.

推论 模糊线性方程组（4.5）有解的必要条件是：对一切 $i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 都存在 k,使得 $a_{ik} \geqslant b_i$.

为了求式（4.5）的解，我们引进两个区间向量：

$$[H^{(i)}] = \{[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mid x_1 = a_{i1} \varepsilon b_i \\ x_2 = a_{i2} \varepsilon b_i, \cdots, x_n = a_{in} \varepsilon b_i\}$$

其中每一个 x_i 可能是区间，可能是数，也可能是空集 $\varnothing$；

$$[\widehat{H}^{(i)}] = \{[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mid x_1 = a_{i1} \hat{\varepsilon} b_i \\ x_2 = a_{i2} \hat{\varepsilon} b_i, \cdots, x_n = a_{in} \hat{\varepsilon} b_i\}$$

其中每一个 x_i 都是区间，可能是 $[0, b]$，也可能是 $[0, 1]$.

如果 $a_{ik} \varepsilon b_i \neq \varnothing$, 那么令

$$[G_{(k)}^{(i)}] = [a_{i1} \hat{\varepsilon} b_i, \cdots, a_{i,k-1} \hat{\varepsilon} b_i, a_{ik} \varepsilon b_i, a_{i,k+1} \hat{\varepsilon} b_i, \cdots, a_{in} \hat{\varepsilon} b_i]$$

亦即当 $a_{ik} \varepsilon b_i \neq \varnothing$ 时,用 $a_{ik} \varepsilon b_i$ 代替 $[\widehat{H}^{(i)}]$ 中第 k 个分量 $a_{ik} \hat{\varepsilon} b_i$，而得 $[G_{(k)}^{(i)}]$.

若 $a_{ik} \varepsilon b_i = \varnothing$,则规定 $[G_{(k)}^{(i)}] = \varnothing$, 这样方程（4.6）的解集为

$$[X^{(i)}] = \bigcup_{k=1}^{n} [G_{(k)}^{(i)}]$$

事实上，一方面由 $[G_{(k)}^{(i)}]$ 的构成易知 $[X^{(i)}]$ 是式(4.6)的解集,另一方面若设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是式(4.6)的任一解，则

$$\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge x_j) = b_i$$

于是可知必有某个整数 $k(1 \leq k < n)$,使得 $a_{ik} \wedge x_k = b_i$,即 $x_k = a_{ik} \varepsilon b_i$,且当 $l \neq k$ 时,有 $a_{il} \wedge x_l \leq b_i$,也即 $x_l = a_{il} \hat{\varepsilon} b_i$,从而

$$X \in [G_{(k)}^{(i)}] \subseteq [X^{(i)}]$$

例 4-1 求解模糊线性方程

$$(0.7 \wedge x_1) \vee (0.9 \wedge x_2) \vee (0.6 \wedge x_3) \vee (0.2 \wedge x_4) = 0.6$$

解 $[H] = [0.7\varepsilon\, 0.6,\ 0.9\varepsilon\, 0.6,\ 0.6\varepsilon\, 0.6,\ 0.2\varepsilon\, 0.6]$

$= [0.6,\ 0.6,\ [0.6,\ 1],\varnothing]$

$[\widehat{H}] = [0.7\hat{\varepsilon} 0.6,\ 0.9\hat{\varepsilon} 0.6,\ 0.6\hat{\varepsilon} 0.6,\ 0.2\hat{\varepsilon} 0.6]$

$= [[0,\ 0.6],[0,\ 0.6],[0,\ 1],[0,\ 1]]$

$[G_{(1)}] = [0.6,[0,\ 0.6],[0,\ 1],[0,\ 1]]$

$[G_{(2)}] = [[0,\ 0.6],0.6,[0,\ 1],[0,\ 1]]$

$[G_{(3)}] = [[0,\ 0.6],[0,\ 0.6],[0.6,\ 1],[0,\ 1]]$

$[G_{(4)}] = \varnothing$

于是方程的解的集合为

$$[X] = [G_{(1)}] \cup [G_{(2)}] \cup [G_{(3)}]$$

若注意到方程组的解集合等于各方程的解集合的交，则易得如下定理.

定理 4-2 模糊线性方程组 (4.5) 有解的充要条件是 $[X] = \bigcap_{i=1}^{m} [X^{(i)}]$ 不空,且当 $[X] \neq \varnothing$ 时,$[X]$ 就是方程组 (4.5) 的解集合.

求解模糊矩阵方程时，不必先求每个方程的解集合，然后再求这些解集合的交，可用矩阵代替向量，把 m 个方程一起考虑，这样较方便些.

例 4-2 求解模糊矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

解 原方程等价于方程组

$$\begin{cases}(0.3 \wedge x_1) \vee (0.2 \wedge x_2) \vee (0 \wedge x_3) = 0.2 \\ (0.5 \wedge x_1) \vee (0 \wedge x_2) \vee (0.6 \wedge x_3) = 0.4 \\ (0.2 \wedge x_1) \vee (0.4 \wedge x_2) \vee (0.1 \wedge x_3) = 0.2\end{cases}$$

我们作

$$[H] = \begin{pmatrix} 0.3\varepsilon 0.2 & 0.5\varepsilon 0.4 & 0.2\varepsilon 0.2 \\ 0.2\varepsilon 0.2 & 0\varepsilon 0.4 & 0.4\varepsilon 0.2 \\ 0\varepsilon 0.2 & 0.6\varepsilon 0.4 & 0.1\varepsilon 0.2 \\ \text{第一个方程} & \text{第二个方程} & \text{第三个方程} \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & [0.2,1] \\ [0.2,1] & \varnothing & 0.2 \\ \varnothing & 0.4 & \varnothing \end{pmatrix}$$

$$[\widehat{H}] = \begin{pmatrix} 0.3\hat{\varepsilon} 0.2 & 0.5\hat{\varepsilon} 0.4 & 0.2\hat{\varepsilon} 0.2 \\ 0.2\hat{\varepsilon} 0.2 & 0\hat{\varepsilon} 0.4 & 0.4\hat{\varepsilon} 0.2 \\ 0\hat{\varepsilon} 0.2 & 0.6\hat{\varepsilon} 0.4 & 0.1\hat{\varepsilon} 0.2 \\ \text{第一个方程} & \text{第二个方程} & \text{第三个方程} \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [0,0.2] & [0,0.4] & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{I} & [0,0.2] \\ \mathrm{I} & [0,0.4] & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

其中 $\mathrm{I} = [0, 1]$.

然后在 $[H]$ 中每一列选定一个非空元素替换$(\widehat{H})$中相应位置的元素，得到$[G_{ijk}]$. 其中 i 表示$[H]$中第一列中第 i 个非空元素替换$[\widehat{H}]$中相应位置的元素；j 表示$[H]$中第二列中第 j 个非空元素替换$[\widehat{H}]$中相应位置的元素；k 表示$[H]$中第三列中第 k 个非空元素替换$[\widehat{H}]$中相应位置的元素. 由于现在$[H]$中每一列都恰有

两个非空元素，故共得出八个$[G_{ijk}]$.

再对每一个$[G_{ijk}]$中各行进行求交运算，记作$[G_{ijk}]_\cap$，于是得到列向量，这就是一个部分解集合. 计算

$$[G_{111}]_\cap = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & [0.2, 1] \\ I & I & [0, 0.2] \\ I & [0, 0.4] & I \end{pmatrix}_\cap = \begin{pmatrix} \varnothing \\ [0, 0.2] \\ [0, 0.4] \end{pmatrix}$$

得对应的部分解集合

$$[X_{111}] = [\varnothing, [0, 0.2], [0, 0.4]]^T = \varnothing$$

再计算

$$[G_{112}]_\cap = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & I \\ I & I & 0.2 \\ I & [0, 0.4] & I \end{pmatrix}_\cap = \begin{pmatrix} \varnothing \\ 0.2 \\ [0, 0.4] \end{pmatrix}$$

得对应的部分解集合

$$[X_{112}] = [\varnothing, 0.2, [0, 0.4]]^T = \varnothing$$

同理可得

$$[X_{131}] = [0.2, [0, 0.2], 0.4]^T$$

$$[X_{132}] = [0.2, 0.2, 0.4]^T$$

$$[X_{211}] = [\varnothing, 0.2, [0, 0.4]]^T = \varnothing$$

$$[X_{212}] = [\varnothing, 0.2, [0, 0.4]]^T = \varnothing$$

$$[X_{231}] = [0.2, 0.2, 0.4]^T$$

$$[X_{232}] = [[0, 0.2], 0.2, 0.4]^T$$

最后对所有的部分解集求并，得原方程的解集合

$$[X] = [X_{131}] \cup [X_{232}].$$

如取$\hat{X} = (0.2, 0.2, 0.4)^T$, $\underset{\smile}{X} = (0.2, 0, 0.4)^T$,则它们都是方程的解,且不难看出,原方程的任一解$X$,有$X \subseteq \hat{X}$,但$X \subseteq \underset{\smile}{X}$

总不成立. 它们分别称 $\hat{X}$, $\underset{\vee}{X}$ 为原方程组的最大解和极小解,一般地有如下定义.

定义 4-2 若 $\hat{X}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)^T$ 和 $\underset{\vee}{X}=(\underset{\vee}{x}_1,\underset{\vee}{x}_2,\cdots,\underset{\vee}{x}_n)^T$ 都是方程(4.4)的解,且对于(4.4)的任一解 X,恒有 $X\subseteq\hat{X}$,但$X\subseteq\underset{\vee}{X}$ 总不成立,则 $\hat{X}$ 称为(4.4)的最大解,而 $\underset{\vee}{X}$ 称为(4.4)的极小解. 当极小解唯一时,称为最小解.

以上介绍的解方程的方法是一种最基本的解法. 这种解法有它的缺点,当矩阵维数增大时,计算量增长得很厉害,特别是有些部分解集合是空集或被其他部分解集合所包含时,会枉费许多精力. 那么是否存在一种避免重复的简便解法呢? 这便是下一节要讲的内容.

4.3 解模糊矩阵方程的表格法

上节我们给出了最大解的定义. 对于最大解有如下结论.

定理 4-3 令 $\hat{X}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)^T$, 其中

$$\hat{x}_j=\bigwedge_{i=1}^{n}\{b_i\,|\,a_{ij}>b_i\} \tag{4.7}$$

(约定空集的下确界为1), 则模糊矩阵方程(4.4)有解的充要条件是 $\hat{X}$ 是它的解, 且当方程有解时 $\hat{X}$ 还是它的最大解.

在证明定理之前, 我们先对式(4.7)说明如下: 式(4.7)右端含义是对于取定的某一个 j, 把 A(方程(4.4)的系数矩阵)中的第 j 列中各行元素分别与 B(方程(4.4)的常数项矩阵)中的对应元素相比较, 当 $a_{ij}>b_i$ 时,就将这样的 b_i 放在一起组成一个有限集合. 然后求此集合的最小者,便为 $\hat{x}_j$,并约定当此集合为空集时取 $\hat{x}_j=1$.

证 充分性很显然, 现证必要性.

设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是式(4.4)的解, 则对一切 i, 有

$$\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij}\wedge x_j)=b_i$$

于是对$\forall i$，$\forall j$，　　$a_{ij} \wedge x_j \leqslant b_i$

即对$\forall i$，$\forall j$　　$x_j \in \begin{cases} [0,\ b_i], & a_{ij} > b_i \\ [0,\ 1], & a_{ij} \leqslant b_i \end{cases}$

从而对$\forall i$，　　$x_j \leqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \{b_i \mid a_{ij} > b_i\} = \hat{x}_j$

因此$X \subseteq \hat{X}$，故

$$A \circ X \subseteq A \circ \hat{X} \tag{4.8}$$

另一方面，由$\hat{X}$的定义可知，对于一切j，若存在i，使$a_{ij} > b_i$，则

$$\hat{x}_j = \bigwedge_{i=1}^{n} \{b_i \mid a_{ij} > b_i\}$$

从而对一切i，　　$a_{ij} \wedge \hat{x}_j \leqslant b_i$

若对于一切i都有$a_{ij} \leqslant b_i$，则$\hat{x}_j = 1$，于是

$$a_{ij} \wedge \hat{x}_j = a_{ij} \leqslant b_i$$

从而对一切j，i，　　$a_{ij} \wedge \hat{x}_j \leqslant b_i$

故　　$$A \circ \hat{X} \subseteq B = A \circ X \tag{4.9}$$

由式（4.8）及式（4.9），便有

$$A \circ \hat{X} = B$$

即$\hat{X}$是式（4.4）的解，并且由式（4.8）$\hat{X}$还是最大解.

定理4-3告诉我们若模糊矩阵方程有解，则一定有最大解，式（4.7）给出了求最大解的方法，这个方法可用表格形式表示出来，具体步骤如下：

（1）写出模糊矩阵方程（4.4）的增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{4.10}$$

（2）上铣，即将增广矩阵中的 a_{ij} 与 b_i 比较，若 $a_{ij} > b_i$，则在 a_{ij} 的位置上（简记为（i, j）处）填写 b_i，否则在（i, j）处留成空白. 所得的矩阵

$$\begin{array}{c|c} \hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \cdots \quad \hat{x}_n & \hat{X} \\ \hline \left(\begin{array}{c} \\ \text{行简化系数矩阵} \\ \\ \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right) \end{array}$$

称为行简化系数矩阵.

（3）按列求下确界，并将其写在相应列的上方，最后得到向量 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)^T$ 就是 $\hat{X}$，即 $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)^T$.

例 4-3 求模糊矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

的最大解.

解　（1）写出增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.3 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{array}\right)$$

（2）上铣

$$\begin{array}{ccc|c} 0.2 & 0.3 & 0.4 & \hat{X} \\ \hline 0.2 & & & 0.2 \\ 0.4 & & 0.4 & 0.4 \\ & 0.3 & & 0.3 \end{array}$$

(3) 按列求下确界便可得出最大解

$$\hat{X} = (0.2, 0.3, 0.4)^T$$

值得注意的是，只有当方程有解时，$\hat{X}$ 才是方程的最大解，所以在应用定理4-3 求最大解时，要先判别方程是否有解. 判别方法前面已给出了两种，但都比较繁，下面给出一种比较简便的方法.

定理 4-4 令 $L_i = \{l_i | l_i \in \{1,2,\cdots,n\}, a_{il_i} \wedge \hat{x}_{l_i} = b_i\}$，$L = \{(l_1, l_2, \cdots, l_m) | l_i \in L_i\}$，则方程(4.4)有解的充要条件是 $L \neq \varnothing$（若对某一 i，$L_i = \varnothing$，则 $L = \varnothing$）.

证 必要性，由定理4-3，若式（4.4）有解，则 $A \circ \hat{X} = B$，即对 $\forall i$，有

$$\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge \hat{x}_j) = b_i$$

从而对 $\forall i$，$\exists l_i$，使

$$a_{il_i} \wedge \hat{x}_{l_i} = b_i$$

取 $l = (l_1, l_2, \cdots, l_m)$，则 $l \in L$，因此 $L \neq \varnothing$.

充分性，若 $L \neq \varnothing$，任取 $l = (l_1, l_2, \cdots, l_m) \in L$，由 L 的定义，对 $\forall i$，当 $j \in L_i$ 时，

$$a_{ij} \wedge \hat{x}_j = b_i$$

于是

$$\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge \hat{x}_j) \geqslant b_i$$

即

$$A \circ \hat{X} \supseteq B \tag{4.11}$$

由上式及式（4.9）则可得 $A \circ \hat{X} = B$，这表明式(4.4)有解.

此定理给出的判定方程是否有解的简便方法，也可用表格形式来表示，将增广矩阵（4.10）中的 a_{ij} 与 b_i 进行比较，若 $a_{ij} = b_i$，则在行简化系数矩阵的（i，j）处填写 b_i（此过程简称为平铣）. 这样得到的矩阵

$$\begin{array}{c|c} \hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \cdots \quad \hat{x}_n & \hat{X} \\ \hline \left(\begin{array}{c} \\ \text{修改系数矩阵} \\ \\ \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right) \end{array}$$

称为修改系数矩阵.

将修改系数矩阵中第 j 列上逐元素与 $\hat{x}_j$ 比较，划掉大于 $\hat{x}_j$ 者（此过程称为划去超上界元素），得到的矩阵

$$\begin{array}{c|c} \hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \cdots \quad \hat{x}_n & \hat{X} \\ \hline \left(\begin{array}{c} \\ \text{简化系数矩阵} \\ \\ \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right) \end{array}$$

称为简化系数矩阵. 于是模糊矩阵方程（4.4）有解的充要条件是简化系数矩阵的所有行都至少有一个非空白元素.

如何求极小解的问题较为复杂，下面仅就特殊情况来讨论.

定理 4-5 若 $L \neq \varnothing$,对于一切 $l \in L$,令 $X^{(l)} = (x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \cdots, x_n^{(l)})$,其中

$$x_k^{(l)} = \bigvee_{i=1}^{n} \{b_i | l_i = k\} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

（约定空集的上确界为 0），则

$$[X] = \{X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T | X^{(l)} \subseteq X \subseteq \hat{X}, l \in L\}$$

是方程（4.4）的一切解的集合，$X^{(l)}$ 称为 l 相应的拟极小解●。

证 设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 满足 $X^{(l)} \subseteq X \subseteq \hat{X}$,由 $X^{(l)}$ 的定义

● $X^{(l)}$ 之所以称为拟极小解，是因为 $X^{(l)}$ 不一定都是极小解，它们相互之间可能存在重合或包含的情况.

可知，对 $\forall i$，有

$$\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge x_j^{(l)}) \geqslant a_{il_i} \wedge x_{l_i}^{(l)} = a_{il_i} \wedge (\vee \{b_j | l_j = l_i\}) \geqslant b_i$$

即 $$A \circ X^{(l)} \supseteq B$$

再由假设和式（4.8）及式（4.9）可得

$$B \subseteq A \circ X^{(l)} \subseteq A \circ X \subseteq A \circ \widehat{X} \subseteq B$$

故知 $$A \circ X^{(l)} = B, \quad A \circ X = B$$

又设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 是方程式(4.4)的任意解，由定理 4-3 知 $X \subseteq \widehat{X}$ 且

$$A \circ \widehat{X} = B$$

于是对于一切 i，存在 l_i 使得

$$b_i = a_{il_i} \wedge x_{l_i} \leqslant a_{il_i} \wedge \hat{x}_{l_i} \leqslant b_i$$

从而 $$a_{il_i} \wedge \hat{x}_{l_i} = b_i$$

取 $l = (l_1, l_2, \cdots, l_m)$（$l_i$ 满足上式），由 L 的定义知 $l \in L$. 对 $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$，当 $l_i = k$ 时，因

$$a_{il_i} \wedge x_{l_i} = b_i$$

所以 $$x_k = x_{l_i} \geqslant b_i$$

从而 $$x_k \geqslant \bigvee_{i=1}^{m} \{b_i | l_i = k\} = x_k^{(l)}$$

当 $l_i \neq k$ 时，$x_k^{(l)} = 0 \leqslant x_k$，故

$$X^{(l)} \subseteq X$$

由定理 4-4 知，L_i 为简化系数矩阵中第 i 行非空白元素列下标的集合，若令 k_i 表示 L_i 中元素的个数，则模糊矩阵方程（4.4）的拟极小解共有 $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_m$ 个.

拟极小解也可借助表格来求. 先在简化系数矩阵中每行取定一个元素，按列求上确界，即得到一拟极小解，然后对全体拟极

小解进行筛选，保留互不包含者，就得全体极小解.

例 4-4 求解例 4-3 中的模糊矩阵方程.

解 先求该方程的极小解. 由例 4-3 知该方程的行简化系数矩阵为

$$
\begin{array}{ccc|c}
0.2 & 0.3 & 0.4 & \widehat{X} \\
\hline
0.2 & & & 0.2 \\
0.4 & & 0.4 & 0.4 \\
 & 0.3 & & 0.3
\end{array}
$$

平铣得修改系数矩阵

$$
\begin{array}{ccc|c}
0.2 & 0.3 & 0.4 & \widehat{X} \\
\hline
0.2 & 0.2 & & 0.2 \\
0.4 & & 0.4 & 0.4 \\
 & 0.3 & 0.3 & 0.3
\end{array}
$$

划去各列超上界元素，得简化系数矩阵

$$
\begin{array}{ccc|c}
0.2 & 0.3 & 0.4 & \widehat{X} \\
\hline
0.2 & 0.2 & & 0.2 \\
 & & 0.4 & 0.4 \\
 & 0.3 & 0.3 & 0.3
\end{array}
$$

这里 $k_1=2$，$k_2=1$，$k_3=2$，于是该方程的拟极小解共有 $2\times1\times2=4$ 个. 由定理 4-5，若取此矩阵的第 1 行第 1 列的元素 0.2，取第 2 行第 3 列的元素 0.4（第 2 行只有这一种取法），取第 3 行第 2 列的元素 0.3，然后将取定的诸元素按列求上确界，则得一拟极小解

$$X^{(1)} = (0.2, 0.3, 0.4)^T$$

同样可得另外 3 个拟极小解分别为

$$X^{(2)} = (0.2, 0, 0.4)^T$$

$$X^{(3)} = (0, 0.3, 0.4)^T$$

$$X^{(4)} = (0,\ 0.2,\ 0.4)^T$$

易见，$X^{(1)} \supseteq X^{(2)}, X^{(3)} \supseteq X^{(4)}$. 因此$X^{(1)}$与$X^{(3)}$不是极小解，删去. 于是该方程的极小解为

$$X^{(2)} = (0.2,\ 0,\ 0.4)^T \qquad X^{(4)} = (0,\ 0.2,\ 0.4)^T$$

又由例4-3知，此方程的极大解为

$$\widehat{X} = (0.2,\ 0.3,\ 0.4)^T$$

根据定理4-5知方程的全部解集为其最大解与极小解的组合，故原方程的解集为

$$[X] = \{(0.2, [0,\ 0.3],\ 0.4)^T, ([0,\ 0.2], [0.2,\ 0.3],\ 0.4)^T\}$$

由此例我们看到，当方程的个数 m，未知数的个数 n 较大时，拟极小解的个数可能很多，其中可能还包含了一些非极小解，我们还需花费很多精力进一步筛选，把非极小解删除. 有没有一种方法使得求出的解恰好是全部极小解，而不含非极小解呢？按下面的筛选原则就能达到这一目的.

极小解的筛选原则 设 $b_1 > b_2 > \cdots > b_m$(其中 b_i 为第 i 个方程的常数项, $i = 1, 2, \cdots, m$), L_i 为简化系数矩阵中第 i 行非空白元素列下标集合.

(1) 对 L_1，任取 $l_1 \in L_1$；

(2) 对 L_2, 若 $\{l_1\} \cap L_2 \neq \varnothing$, 即 $l_1 \in L_2$, 则取 $l_2 = l_1$, 否则 l_2 依次遍取 L_2；

(3) 对 L_3, 若 $\{l_1, l_2\} \cap L_3 \neq \varnothing$, 则任取 $l_3 \in \{l_1, l_2\} \cap L_3$, 否则 l_3 依次遍取 L_3；

(4) 对 L_i, 若前面选定的 $\{l_1, l_2, \cdots, l_{i-1}\}$ 与 L_i 交不空, 则从交中任取一指标作为 l_i, 否则需让 l_i 依次遍取 L_i；

(5) 以上过程全部完成后，再变 l_1 在 L_1 中的取法, 直到 l_1 遍取 L_1, 记所有这样选取的下标向量 $(l_1, l_2, \cdots, l_m)$ 构成的集合为 L；

(6) 对 L 中的某一下标向量写出所对应的矩阵，然后按列求上确界（规定空集的上确界为0），便得到一极小解，L 中所有的下标向量对应的极小解，就是全部极小解.

比如例4-4按b_i从大到小排序后，可得简化系数矩阵

$$\begin{pmatrix} & & 0.4 \\ & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & \end{pmatrix}$$

这里$L_1=\{3\}$，$L_2=\{2,3\}$，$L_3=\{1,2\}$. 取$l_1=3$（只有这一种取法），因$\{l_1\}\cap L_2\neq\varnothing$，所以取$l_2=3$，又因$\{l_1,l_2\}\cap L_3=\varnothing$，故$l_3$遍取$L_3$，即取$l_3=1$或2，于是得下标向量，$(3,3,1)$，$(3,3,2)$. 与此两下标向量对应的$3\times3$矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} & & 0.4 \\ & & 0.3 \\ 0.2 & & \end{pmatrix} 和 \begin{pmatrix} & & 0.4 \\ & & 0.3 \\ & 0.2 & \end{pmatrix}$$

按列求上确界，则恰好得到两极小解，分别为

$$(0.2,0,0.4)^T,(0,0.2,0.4)^T$$

需要说明的是，当$\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$中有相同元素时，上述选法仍有可能对应着拟极小解，此时还需进一步筛选. 但不论何种情况，按上述规则求极小解都是方便的.

前面我们介绍了求解模糊矩阵方程表格法的全过程，此过程可借助于表4-1来进行.

表4-1　模糊矩阵方程求解表

$\hat{x}_1$	…	$\hat{x}_i$	…	$\hat{x}_m$	$\hat{X}$
		C			$\bar{A}$
$x_1^{(l)}$	…	$x_i^{(l)}$	…	$x_m^{(l)}$	$X^{(l)}$

说明　(1) 按b_i从大到小排序后得到的对应增广矩阵写入$\bar{A}$处；

(2) 对$\bar{A}$上铣后得到的矩阵写入C处；

(3) 求最大解$\hat{X}$，将第i个分量写入$\hat{x}_i$处；

(4) 对 $\overline{A}$ 平铣，即把与 a_{ij} 相等的 b_i 补入 C 中相应的空白处 (加框)；

(5) 划去 C 中各列的超上界元素 (在划去的元素上方划一横线)，并判别解的存在性；

(6) 根据筛选原则求极小解，并把第 l 个极小解的第 i 个分量写入 $x_i^{(l)}$ 处.

根据此表可写出原方程的全部解集.

例 4-5 求解模糊矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

解 列表求解 (见表 4-2).

表 4-2 例 4-5 求解表

1	0.4	0.4	0.5			$\widehat{X}$		
$\boxed{0.7}$				0.7	0	0.1	0.3	0.7
$\boxed{0.5}$		$\overline{0.5}$	0.5	0.5	0.4	0.6	0.6	0.5
	$\overline{0.5}$		0.5	0.1	0.6	0	0.7	0.5
$\boxed{0.4}$	0.4	0.4	$\boxed{0.4}$	0.4	0.5	0.8	0.4	0.4
0.7	0	0	0.5			$X^{(1)}$		

于是由表 4-2 得原方程的解集为

$$[X] = \{([0.7,1],[0,0.4],[0,0.4],0.5)^T\}$$

4.4 可转化为模糊关系方程的方程

4.4.1 模糊含度与模糊含度方程

在矿藏勘探中，为了确定某地区 U 的矿藏分布范围 $M \in$

$\mathscr{P}(U)$，在该地区设立一系列探测钻井. 记

$$\mathscr{T} \triangleq \{T^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma, T^{(\gamma)} \in \mathscr{P}(U)\}$$

（其中 $T^{(\gamma)}$ 为钻井有效探测范围），当钻井发现矿，就给 $T^{(\gamma)}$ 赋值 $\sigma_M(T^{(\gamma)}) = 1$，否则赋值 $\sigma_M(T^{(\gamma)}) = 0$，得到映射

$$\sigma_M : \mathscr{T} \to \{0,1\}$$

$$T^{(\gamma)} \mapsto \sigma_M(T^{(\gamma)}) = \begin{cases} 1, & T^{(\gamma)} \cap M \neq \varnothing(\text{钻井发现矿}) \\ 0, & T^{(\gamma)} \cap M = \varnothing(\text{钻井未发现矿}) \end{cases}$$

σ_M 称为（U，$\mathscr{T}$）上的一个含度.

于是确定矿藏的分布范围，就成为由已知各钻井的探测结果 $\sigma_M = f$，求 M 的问题. 实际上矿藏分布是模糊集 $\underset{\sim}{M}$，而钻井所能探测的有效范围也是模糊集 $\underset{\sim}{T}^{(\gamma)}$，其隶属度随着井孔距离增大而减小，且根据钻井取样中含矿质量而赋值 $\sigma_{\underset{\sim}{M}}(\underset{\sim}{T}^{(\gamma)}) \in [0,1]$. 这样上述问题就是已知各钻井探测资料 $\sigma_M = f$，求矿藏分布 $\underset{\sim}{M}$. 这就是所谓的模糊含度方程的求解问题.

下面先引进几个记号，然后再给出模糊含度的概念.

设 U 为论域，记

$$\underset{\sim}{\mathscr{T}} = \{\underset{\sim}{T}^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma, \underset{\sim}{T}^{(\gamma)} \in \mathscr{F}(U)\}$$

且设 $\underset{\sim}{M} \in \mathscr{F}(U)$，对 $\forall \lambda \in [0,1]$，令

$$\mathscr{T}_\lambda = \{T_\lambda^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma\}$$

$$\sigma_{M_\lambda} : \mathscr{T}_\lambda \to \{0,1\}$$

$$\sigma_{M_\lambda}(T_\lambda^{(\gamma)}) \triangleq \begin{cases} 1, & M_\lambda \cap T_\lambda^{(\gamma)} \neq \varnothing, \\ 0, & M_\lambda \cap T_\lambda^{(\gamma)} = \varnothing, \end{cases}$$

定义 4-3 令

$$\sigma_{\underset{\sim}{M}} : \underset{\sim}{\mathscr{T}} \to \{0,1\}$$

$$\underset{\sim}{T}^{(\gamma)} \mapsto \sigma_{\underset{\sim}{M}}(T_\lambda^{(\gamma)}) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge \sigma_{M_\lambda}(T_\lambda^{(\gamma)}))$$

$\sigma_{\underset{\sim}{M}}$ 称为空间（U, $\mathscr{T}$）上的模糊含度.

关于模糊含度有下述结论.

定理 4-6

$$\sigma_{\underset{\sim}{M}}(\underset{\sim}{T}^{(\gamma)}) = \bigvee_{u \in U}(\underset{\sim}{M}(u) \wedge \underset{\sim}{T}^{(\gamma)}(u)) = \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{T}^{(\gamma)}$$

（$\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{T}^{(\gamma)}$ 为 $\underset{\sim}{M}$ 与 $\underset{\sim}{T}^{(\gamma)}$ 的内积）.

证 因为 $\sigma_{M_\lambda}(T_\lambda^{(\gamma)}) = 1 \Leftrightarrow M_\lambda \cap T_\lambda^{(\gamma)} \neq \varnothing$

$$\Leftrightarrow \exists u \in U, M_\lambda(u) \wedge T_\lambda^{(\gamma)}(u) = 1$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{u \in U}(M_\lambda(u) \wedge T_\lambda^{(\gamma)}(u)) = 1$$

所以 $$\sigma_{M_\lambda}(T_\lambda^{(\gamma)}) = \bigvee_{u \in U}(M_\lambda(u) \wedge T_\lambda^{(\gamma)}(u)) = M_\lambda \circ T_\lambda^{(\gamma)}$$

因而

$$\begin{aligned}
\sigma_{\underset{\sim}{M}}(\underset{\sim}{T}^{(\gamma)}) &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]}(\lambda \wedge \sigma_{M_\lambda}(T_\lambda^{(\gamma)})) \\
&= \bigvee_{\lambda \in [0,1]}\left[\lambda \wedge \left(\bigvee_{u \in U}(M_\lambda(u) \wedge T_\lambda^{(\gamma)}(u))\right)\right] \\
&= \bigvee_{u \in U}\left[\bigvee_{\lambda \in [0,1]}\left(\lambda \wedge (M_\lambda(u) \wedge T_\lambda^{(\gamma)}(u))\right)\right] \\
&= \bigvee_{u \in U}\left[\left(\bigvee_{\lambda \in [0,1]}(\lambda \wedge M_\lambda(u))\right)\right. \\
&\quad \left.\wedge \left(\bigvee_{\lambda \in [0,1]}(\lambda \wedge T_\lambda^{(\gamma)}(u))\right)\right] \\
&= \bigvee_{u \in U}[\underset{\sim}{M}(u) \wedge \underset{\sim}{T}^{(\gamma)}(u)] = \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{T}^{(\gamma)}
\end{aligned}$$

现在来给出模糊含度方程，模糊含度方程是指形如

$$\sigma_{\underset{\sim}{M}}(\underset{\sim}{T}^{(\gamma)}) = f(\underset{\sim}{T}^{(\gamma)}(u)) = f_\gamma \in [0,1]$$

的方程，其中 $\sigma_{\underset{\sim}{M}} = f$ 已知，求 $\underset{\sim}{M} \in \mathscr{F}(U)$，且使 $\underset{\sim}{M}$ 满足方程

$$\bigvee_{u \in U}(\underset{\sim}{M}(u) \wedge \underset{\sim}{T}^{(\gamma)}(u)) = f_\gamma(\gamma \in \Gamma)$$

4.4.2 模糊含度方程的转化

模糊含度方程可转化为模糊关系方程.

定理4-7 令 $V=\{v_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$

$$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times V),\quad \underset{\sim}{R}(u,v_\gamma)\triangleq \underset{\sim}{T}^{(\gamma)}(u)$$

$$\underset{\sim}{S}\in\mathscr{F}(V),\quad \underset{\sim}{S}(v_\gamma)\triangleq f_\gamma$$

则模糊含度方程 $\sigma_{\underset{\sim}{M}}=f$ 等价于模糊关系方程

$$\underset{\sim}{M}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{S}$$

证 由于

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{M}\circ\underset{\sim}{R})(v_\gamma)&=\bigvee_{u\in U}(\underset{\sim}{M}(u)\wedge\underset{\sim}{R}(u,v_\gamma))\\&=\bigvee_{u\in U}(\underset{\sim}{M}(u)\wedge\underset{\sim}{T}^{(\gamma)}(u))\\&=\sigma_{\underset{\sim}{M}}(\underset{\sim}{T}^{(\gamma)})\end{aligned}$$

且 $\underset{\sim}{S}(v_\gamma)=f_\gamma$，因此

$$(\underset{\sim}{M}\circ\underset{\sim}{R})(v_\gamma)=\underset{\sim}{S}(v_\gamma)\Leftrightarrow\sigma_{\underset{\sim}{M}}(\underset{\sim}{T}^{(\gamma)})=f_\gamma\quad(\gamma\in\Gamma)$$

即
$$\underset{\sim}{M}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{S}\Leftrightarrow\sigma_{\underset{\sim}{M}}=f$$

看一个例子.

例4-6 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，

$$\mathscr{T}=\{\underset{\sim}{T}^{(1)},\underset{\sim}{T}^{(2)},\cdots,\underset{\sim}{T}^{(m)}\}$$

如图4-1所示，将区域 U 分成 n 个小区域块，$\underset{\sim}{T}^{(j)}$ 表示第 j 个钻井的探测区域，根据 u_i 与钻井 $\underset{\sim}{T}^{(j)}$ 距离远近，确定 $\underset{\sim}{T}^{(j)}(u_i)=r_{ij}\in[0,1]$，再按各钻井取样分别赋值 $\sigma_{\underset{\sim}{M}}(\underset{\sim}{T}^{(j)})=f_j\in[0,1]$，于是矿藏分布

$$\underset{\sim}{M}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

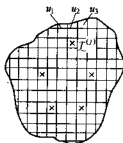


图4-1 探测区域分块

满足模糊关系方程

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

解此方程，便可得区域 U 矿藏的分布状况，其中 x_i 表示 u_i 对 $\underset{\sim}{M}$ 的隶属度，反映了小区域 u_i 矿藏的分布情况.

习 题 4

1. 求解下列模糊关系方程:

(1) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.8 & 0 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$

(3) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \circ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.9 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$

$= (0.7, 0.4, 0.4, 0.3, 0.6)$.

2. 求解下列模糊关系方程:

(1) $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}$

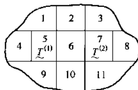
3. 设 $U = \{u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{11}\}$，$\underset{\sim}{T}_1 \in \mathscr{F}(U)$，$\underset{\sim}{T}_2 \in \mathscr{F}(U)$，且

$$\underset{\sim}{T}_1 = (0.8, 0.5, 0.2, 0.8, 1, 0.8, 0.2, 0, 0.8, 0.5, 0.2)$$

$$\underset{\sim}{T}_2 = (0.2, 0.5, 0.8, 0, 0.2, 0.8, 1, 0.8, 0.2, 0.8, 0.8)$$

$$\sigma_{\underset{\sim}{M}}(\underset{\sim}{T}^{(1)}) = 0.7, \quad \sigma_{\underset{\sim}{M}}(\underset{\sim}{T}^{(2)}) = 0.3 \qquad (*)$$

求满足方程（*）的最大解 $\underset{\sim}{M}$，并求 $M_{0.7}$，按下图画出 $M_{0.7}$的范围.



第 5 章　模糊映射与模糊变换

模糊映射与模糊变换是模糊数学基本理论的重要内容．本章先由模糊关系来确定模糊映射与模糊变换，然后再介绍重要的扩张原理.

5.1　模糊关系的投影与截影

模糊关系的投影与截影是研究模糊映射与模糊变换的工具.

定义 5-1　设 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times V)$, $\underset{\sim}{R}$ 在 U 中的投影是指 U 的一个模糊子集,记作 $\underset{\sim}{R}_U$,它具有隶属函数

$$\underset{\sim}{R}_U(u) \triangleq \bigvee_{v \in V} \underset{\sim}{R}(u,v)$$

$\underset{\sim}{R}$ 在 V 中的投影是指 V 的一个模糊子集,记作 $\underset{\sim}{R}_V$,它具有隶属函数

$$\underset{\sim}{R}_V(v) \triangleq \bigvee_{u \in U} \underset{\sim}{R}(u,v)$$

当 U、V 为有限时，$\underset{\sim}{R}_U$ 、$\underset{\sim}{R}_V$ 都可由模糊向量表示.

例 5-1　设

$$R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 & 0.9 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

（列依次为 v_1　v_2　v_3　v_4）

则　$\underset{\sim}{R}_U = (0.7, 0.8, 0.9)^T$, $\underset{\sim}{R}_V = (0.8, 0.6, 0.9, 0.8)$.

定义 5-2　设 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times V)$,对任意 $u \in U$, $\underset{\sim}{R}$ 在 u 处的截影是指 V 的一个模糊子集,记作 $\underset{\sim}{R}|_u$，它具有隶属函数

$$\underset{\sim}{R}\big|_u(v) \triangleq \underset{\sim}{R}(u, v)$$

$\underset{\sim}{R}$ 在 v 处的截影是指 U 的一个模糊子集，记作 $\underset{\sim}{R}\big|_v$，它具有隶属函数

$$\underset{\sim}{R}\big|_v(u) \triangleq \underset{\sim}{R}(u, v)$$

投影、截影的几何意义如图 5-1 所示.

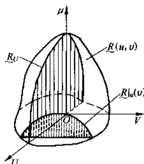


图 5-1　模糊关系的投影和截影

当 U、V 都是有限集时，$\underset{\sim}{R}$ 的截影也可用模糊向量表示，它们就是 R 的某一行某一列.

例 5-2　设

$$\underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 & 0.9 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

（列依次对应 v_1　v_2　v_3　v_4）

则　$\underset{\sim}{R}\big|_{v_1} = (0.3,\ 0.4,\ 0.8)^T$，$\underset{\sim}{R}\big|_{u_3} = (0.8,\ 0.6,\ 0.9,\ 0)$

5.2　模糊映射与模糊变换

5.2.1　模糊映射

在第 1 章我们对普通映射进行了两方面的扩张. 一方面是把

一个从 U 到 V 的映射，扩张成从 U 到 $\mathscr{P}(V)$ 的映射；另一方面是把一个从 U 到 V 的映射直接扩张成由 $\mathscr{P}(U)$ 到 $\mathscr{P}(V)$ 的映射. 对于模糊集，我们也有类似的扩张.

定义 5-3 设 U、V 为非空集合，若存在一个法则 $\underset{\sim}{f}$，通过它对于 U 中的任意元素 u，都有 V 中唯一确定的模糊子集 $\underset{\sim}{B}$ 与之对应，则 $\underset{\sim}{f}$ 称为从 U 到 V 的模糊映射，记为

$$\underset{\sim}{f}: U \to \mathscr{F}(V)$$

$$u \mapsto \underset{\sim}{f}(u) = \underset{\sim}{B}$$

由定义易知，U 中的元素 u 在模糊映射 $\underset{\sim}{f}$ 的作用下变为 V 中的模糊子集 $\underset{\sim}{B}$，因此，这种映射起着模糊化的作用，故又称之为模糊化函数.

例 5-3 设 U 为某校全体教师的集合，V 为体接项目的集合，$\underset{\sim}{f}$ 为体检. 每个教师的体接结果确切地讲应该是 V 上的一个模糊子集，因此 $\underset{\sim}{f}$ 为从 U 到 V 的模糊映射.

普通映射和普通关系之间有下述关系：给定普通映射 f：$U \to V$，可唯一确定一个普通关系 $R \in \mathscr{P}(U \times V)$ 满足：

（1）投影 $R_U = U$；

（2）截影 $R|_u = \{v | v = f(u)\}$.

反之，给定普通关系 R (u, v)，若满足：

（1）投影 $R_U = U$；

（2）截影 $R|_u = \{v\}$（单点集）.

则 R 唯一确定一个映射 f：$U \to V$，满足 $f(u) = \{v\}$，即普通映射和普通关系是等价的. 这一结论对于接糊映射与模糊关系仍然成立.

定理 5-1 若给定模糊映射 $\underset{\sim}{f}$：$U \to \mathscr{F}(V)$，则唯一确定一个接糊关系 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times V)$，使对任意的 $u \in U$，都有

$$\underset{\sim}{R}|_u = \underset{\sim}{f}(u)$$

反之，若给定模糊关系 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times V)$，则唯一确定一个模糊映射 $\underset{\sim}{f}: U \to \mathscr{F}(V)$，使对任意的 $u \in U$，都有

$$\underset{\sim}{f}(u) = \underset{\sim}{R}\big|_u$$

定理的证明是显然的，对于前一部分，只需定义

$$\underset{\sim}{R}(u,v) \triangleq (\underset{\sim}{f}(u))(v)$$

对于后一部分，则只需定义

$$(\underset{\sim}{f}(u))(v) \triangleq \underset{\sim}{R}(u,v)$$

此定理表明，模糊映射 $\underset{\sim}{f}: U \to \mathscr{F}(V)$ 与模糊关系 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times V)$是等价的.

例 5-4 设 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$. 若给定模糊映射

$$\underset{\sim}{f}: U \to \mathscr{F}(V)$$

$$u_i \mapsto \underset{\sim}{f}(u_i) = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})$$

则得唯一模糊关系

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

可见，对任意的 $u_i \in U$，有 $R\big|_{u_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im}) = \underset{\sim}{f}(u_i)$，反之若给定模糊关系

$$R = (r_{ij})_{n \times m} \in \mathscr{F}(U \times V)$$

则有唯一的映射

$$\underset{\sim}{f}: U \to \mathscr{F}(V)$$

$$u_i \mapsto \underset{\sim}{f}(u_i) = (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im})$$

可见 $\underset{\sim}{f}(u_i) = (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im}) = R\big|_{u_i}$

5.2.2 模糊变换

从 U 到 V 集合变换的概念可直接引入模糊集.

定义 5-4 设有非空集合 U、V，若存在一个法则 $\underset{\sim}{T}$，通过它，对于 U 中任意一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，都有 V 中唯一确定的模糊子集 $\underset{\sim}{B}$ 与之对应，则 $\underset{\sim}{T}$ 称为从 U 到 V 的模糊变换，记为

$$\underset{\sim}{T}:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$$

由定义可知，模糊变换 $\underset{\sim}{T}$ 就是把 U 中模糊子集变为 V 中模糊子集的映射.

关于模糊变换和模糊关系有如下结论.

定理 5-2 任给模糊关系 $\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times V)$，都唯一确定一个从 U 到 V 的模糊变换 $\underset{\sim}{T}$，使得对任意 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$，均有

$$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{A})=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(V) \tag{5.1}$$

其隶属函数为

$$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{A})(v)=\bigvee_{u\in U}(\underset{\sim}{A}(u)\wedge\underset{\sim}{R}(u,v))$$

$\underset{\sim}{T}$ 称为 $\underset{\sim}{R}$ 所诱导出的模糊变换.

此定理的证明是很容易的，只要把式（5.1）看作是 $\underset{\sim}{T}$ 的定义即可得出定理的结论.

模糊变换的直观意义，可以解释为模糊概念在不同论域中的表现之间的转换关系，即若有一个概念 α，在 U 中的表现为模糊集 $\underset{\sim}{A}$，又知在 U 与 V 之间存在着给定的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，则 α 在 V 中的表现为模糊集

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}$$

例 5-5 设 α 是“男少年”，α 在体重论域

$$U=\{40,50,60,70,80\}\quad(\text{单位:kg})$$

上的表现为

$$A=(0.8,0.9,0.6,0.2,0)$$

设某地区体重和体高的模糊关系为

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 40 \\ 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1.4 & 1.5 & 1.6 & 1.7 & 1.8 \end{matrix}$$

则“男少年”在身高论域

$$V = \{1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8\} \quad (\text{单位:m})$$

上的表现为

$$B = A \circ R = (0.8, 0.9, 0.8, 0.6, 0.2)$$

5.3 扩张原理

5.3.1 扩张原理 I

由经典扩张原理我们知道，若f为U到V的映射，则对于给定的$A \in \mathscr{P}(U)$，通过映射f，总可以得到一个集$B = f(A) \in \mathscr{P}(V)$，即由$f$可诱导出一个新的映射

$$F: \mathscr{P}(U) \mapsto \mathscr{P}(V)$$

$$A \mapsto F(A) = \{v \mid \exists u \in A, \text{使 } v = f(u)\} = B$$

用特征函数表示，则有

$$B(v) = F(A)(v) = \bigvee_{f(u)=v} A(u)$$

由映射f还可诱导出另一个映射，记作F^{-1}，

$$F^{-1}: \mathscr{P}(V) \to \mathscr{P}(U)$$

$$B \mapsto F^{-1}(B) = \{u \mid u \in U, f(u) \in B\}$$

用特征函数表示，则有

$$F^{-1}(B)(u) = B(f(u))$$

对于模糊集来说，我们很自然会提出这样一个问题：若给定$\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，它在$f$映射下成为什么？即若记$\underset{\sim}{A}$在$f$映射之下成为$\underset{\sim}{B}$的话，那么$\underset{\sim}{B}$的隶属函数应如何确定；反过来，给定

模糊集合 $\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(V)$，那么 $\mathscr{F}(U)$ 中的什么集通过 f 映射为 $\underset{\sim}{B}$？对此，Zadeh 在 1975 年作了一项规定，把普通集合论的方法作为公理直接扩展到模糊集里来，这就是著名的扩张原理，实际上是一个定义.

定理 5-3 （扩张原理 Ⅰ）设 $f: U \to V$，由 f 可诱导出两个映射

$$F: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$$
$$\underset{\sim}{A} \mapsto \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}) \in \mathscr{F}(V)$$

它具有隶属函数

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})(v) \triangleq \begin{cases} \bigvee\limits_{f(u)=v} \underset{\sim}{A}(u), & v \in f(U) \\ 0, & v \,\overline{\in}\, f(U) \end{cases}$$

和

$$F^{-1}: \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$$
$$\underset{\sim}{B} \mapsto \underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B}) \in \mathscr{F}(U)$$

它具有隶属函数

$$\underset{\sim}{F}^{-1}(B)(u) \triangleq \underset{\sim}{B}(f(u))$$

$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})$称为 $\underset{\sim}{A}$ 在 f 之下的象；$\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})$叫 $\underset{\sim}{B}$ 在 f 之下的原象.

例 5-6 设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，且

$$f(u) = \begin{cases} v_1, & u = u_4、u_5 \\ v_3, & u = u_3 \\ v_4, & u = u_1、u_2 \end{cases}$$

又设 U 上的模糊集 $\underset{\sim}{A} = \{0.1, 0.8, 0.4, 0.3, 1\}$

则由扩张原理 Ⅰ

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})(v_1) = \bigvee_{f(u)=v_1} \underset{\sim}{A}(u) = 0.3 \vee 1 = 1$$

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})(v_2) = 0$$

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})(v_3) = \bigvee_{f(u)=v_3} \underset{\sim}{A}(u) = 0.4$$

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})(v_4)=\bigvee_{f(u)=v_4}\underset{\sim}{A}(u)=0.1\vee 0.8=0.8$$

于是 $\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})=\{1, 0, 0.4, 0.8\}$

又 $\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})(u_1)=\underset{\sim}{B}(f(u_1))=\underset{\sim}{B}(v_4)=0.8$

$$\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})(u_2)=\underset{\sim}{B}(f(u_2))=\underset{\sim}{B}(v_4)=0.8$$

$$\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})(u_3)=\underset{\sim}{B}(f(u_3))=\underset{\sim}{B}(v_3)=0.4$$

$$\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})(u_4)=\underset{\sim}{B}(f(u_4))=\underset{\sim}{B}(v_1)=1$$

$$\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})(u_5)=\underset{\sim}{B}(f(u_5))=\underset{\sim}{B}(v_1)=1$$

故 $\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})=\{0.8, 0.8, 0.4, 1, 1\}$

$\underset{\sim}{F}$ 和 $\underset{\sim}{F}^{-1}$的性质

(1) $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})=\varnothing\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}=\varnothing$. 若$f$为满射,且 $\underset{\sim}{F}^{-1}(B)=\varnothing$,则 $\underset{\sim}{B}=\varnothing$.

(2) 若 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$,则 $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})\subseteq\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{B})$. 若 $\underset{\sim}{C}\subseteq\underset{\sim}{D}$,则 $\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{C})\subseteq\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{D})$.

(3) $\underset{\sim}{F}(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t)=\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}_t)$

$$\underset{\sim}{F}^{-1}(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{B}_t)=\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B}_t)$$

(4) $\underset{\sim}{F}(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t)\subseteq\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}_t)$

$$\underset{\sim}{F}^{-1}(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{B}_t)=\bigcap_{t\in T}F^{-1}(\underset{\sim}{B}_t)$$

(5) $[\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})]^c=\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B}^c)$. 若$f$为满射,则$[\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})]^c\subseteq\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}^c)$.

(6) $\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}))\supseteq\underset{\sim}{A}$ (f为单射时取等号)

$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B}))\subseteq\underset{\sim}{B}$ (f为满射时取等号)

证 仅证最后两式. 因为

$$\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}))(u) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})(f(u))$$

$$= \bigvee_{f(u')=f(u)} \underset{\sim}{A}(u') \geqslant \underset{\sim}{A}(u)$$

所以 $\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})) \supseteq \underset{\sim}{A}$ (f为单射时,$f(u')=f(u) \Rightarrow u'=u$,因而取等号). 又因为

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B}))(v) = \bigvee_{f(u)=v} \underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})(u) = \bigvee_{f(u)=v} \underset{\sim}{B}(f(u))$$

$$= \begin{cases} \underset{\sim}{B}(v), \exists u, 使 f(u)=v \\ 0, \forall u, 有 f(u) \neq v \end{cases} \leqslant \underset{\sim}{B}(v)$$

(这里约定 $\bigvee_{\varnothing} = 0$) 所以 $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})) \subseteq \underset{\sim}{B}$ (f是满射时,等式成立).

5.3.2 扩张原理Ⅱ

作为扩张原理Ⅱ的准备，我们引入模糊集直积的概念. 在第1章，我们介绍了普通集直积的概念，所谓普通集直积是指

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(u_1, u_2, \cdots, u_n) \mid u_i \in A_i; i = 1, 2, \cdots, n\}$$

其特征函数为

$$(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \bigwedge_{k=1}^{n} A_k(u_k)$$

把上述概念推广到模糊集就有如下定义.

定义 5-5 设 $\underset{\sim}{A}_i \in \mathscr{F}(U_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$,记

$$\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n \triangleq \int_{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n} \frac{\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i(u_i)\right)}{(u_1, u_2, \cdots, u_n)}$$

称为模糊集 $\underset{\sim}{A}_1$, $\underset{\sim}{A}_2$, …, $\underset{\sim}{A}_n$ 的直积，其隶属函数为

$$(\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n)(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i(u_i)$$

其中

$$\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n \in \mathscr{F}(U_1) \times \mathscr{F}(U_2) \times \cdots \times \mathscr{F}(U_n)$$

例 5-7 设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$，若

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.2}{u_1} + \frac{0.4}{u_2} + \frac{0.1}{u_4}, \qquad \underset{\sim}{B} = \frac{0.5}{v_1} + \frac{0.1}{v_2}$$

则有

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} &= \frac{0.2 \wedge 0.5}{(u_1, v_1)} + \frac{0.2 \wedge 0.1}{(u_1, v_2)} + \frac{0.4 \wedge 0.5}{(u_2, v_1)} + \frac{0.4 \wedge 0.1}{(u_2, v_2)} \\ &\quad + \frac{0.1 \wedge 0.5}{(u_4, v_1)} + \frac{0.1 \wedge 0.1}{(u_4, v_2)} \\ &= \frac{0.2}{(u_1, v_1)} + \frac{0.1}{(u_1, v_2)} + \frac{0.4}{(u_2, v_1)} \\ &\quad + \frac{0.1}{(u_2, v_2)} + \frac{0.1}{(u_4, v_1)} + \frac{0.1}{(u_4, v_2)}\end{aligned}$$

模糊集合的直积具有以下性质：

性质 5-1

(1) $(\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n)_\lambda = (\underset{\sim}{A}_1)_\lambda \times (\underset{\sim}{A}_2)_\lambda \times \cdots \times (\underset{\sim}{A}_n)_\lambda$

(2) $(\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (\underset{\sim}{A}_1)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \times (\underset{\sim}{A}_2)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \times \cdots \times (\underset{\sim}{A}_n)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$

(3) $\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \Big((\underset{\sim}{A}_1)_\lambda \times (\underset{\sim}{A}_2)_\lambda \times \cdots \times (\underset{\sim}{A}_n)_\lambda \Big)$

证明：(1) $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n)_\lambda$

$\Leftrightarrow (\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i(x_i) \geqslant \lambda$

$\Leftrightarrow \forall i \leqslant n, \underset{\sim}{A}_i(x_i) \geqslant \lambda$

$\Leftrightarrow \forall i \leqslant n, x_i \in (\underset{\sim}{A}_i)_\lambda$

$\Leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (\underset{\sim}{A}_1)_\lambda \times (\underset{\sim}{A}_2)_\lambda \times \cdots \times (\underset{\sim}{A}_n)_\lambda$

所以 $(\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{A}_2 \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_n)_\lambda = (\underset{\sim}{A}_1)_\lambda \times (\underset{\sim}{A}_2)_\lambda \times \cdots \times (\underset{\sim}{A}_n)_\lambda$

(2) 证明同 (1).

(3) 由分解定理和性质 5-1 (1) 直接可得.

定理5-4 （扩张原理Ⅱ）

设映射 $f:U_1\times U_2\times\cdots\times U_m\to V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$

$(u_1,u_2,\cdots,u_m)\mapsto f(u_1,u_2,\cdots,u_m)=v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$

由 f 可导出映射

$\underset{\sim}{F}:\mathscr{F}(U_1)\times\mathscr{F}(U_2)\times\cdots\times\mathscr{F}(U_m)\to\mathscr{F}(V_1\times V_2\times\cdots\times V_n)$

它具有隶属函数

$$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}_1\times\underset{\sim}{A}_2\times\cdots\times\underset{\sim}{A}_m)(v)$$

$$=\begin{cases}\bigvee\limits_{f(u_1,u_2,\cdots,u_m)=v}\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{m}\underset{\sim}{A}_i(u_i)\right), & v\in f\left(\prod\limits_{i=1}^{m}A_i\right)\\ 0, & v\notin f\left(\prod\limits_{i=1}^{m}A_i\right)\end{cases}$$

其中 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$，$\underset{\sim}{A}_i\in\mathscr{F}(V_i)$，$A_i\in\mathscr{P}(V_i)$，$i=1,2,\cdots,m$ 和映射

$\underset{\sim}{F}^{-1}:\mathscr{F}(V_1)\times\mathscr{F}(V_2)\times\cdots\cdots\times\mathscr{F}(V_n)\to\mathscr{F}(U_1\times U_2\times\cdots\times U_m)$

它具有隶属函数

$$\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B}_1\times\underset{\sim}{B}_2\times\cdots\times\underset{\sim}{B}_n)(u)=\bigwedge_{i=1}^{n}\underset{\sim}{B}_i(v_i)$$

其中 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)\in U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$，$\underset{\sim}{B}_i\in\mathscr{F}(U_i)$，$B_i\in\mathscr{P}(U_i)$，$i=1,2,\cdots,m$

例5-8 设 $U=\{1,2,\cdots,n\}$，$f:U\times U\to U$，即 f 为“+”，若

$$\underset{\sim}{A}=\text{“近似为2”}=\frac{0.4}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.4}{3}(\text{记为}\ \underset{\sim}{2}),$$

则 $\quad\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{A})=\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{2}+\underset{\sim}{2}$

$$=\frac{0.4\wedge0.4}{1+1}+\left(\frac{0.4\wedge1}{1+2}\vee\frac{1\wedge0.4}{2+1}\right)$$

$$+\left(\frac{1\wedge 1}{2+2}\vee\frac{0.4\wedge 0.4}{1+3}\vee\frac{0.4\wedge 0.4}{3+1}\right)$$

$$+\left(\frac{1\wedge 0.4}{2+3}\vee\frac{0.4\wedge 1}{3+2}\right)+\frac{0.4\wedge 0.4}{3+3}$$

$$=\frac{0.4}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.4}{6}=\underset{\sim}{4}\text{（近似为4）}$$

由分解定理可以证明多元扩张映射有如下性质：

性质 5-2 设 $f: U_1\times U_2\times\cdots\times U_m\rightarrow V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$，$f$ 诱导出 F 和 F^{-1} 两个多元扩张映射，则：

(1) $F(\underset{\sim}{A}_1\times\underset{\sim}{A}_2\times\cdots\times\underset{\sim}{A}_m)$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda F\left((\underset{\sim}{A}_1)_\lambda\times(\underset{\sim}{A}_2)_\lambda\times\cdots\times(\underset{\sim}{A}_m)_\lambda\right)$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda F\left((\underset{\sim}{A}_1)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\times(\underset{\sim}{A}_2)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\times\cdots\times(\underset{\sim}{A}_m)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\right)$$

(2) $F^{-1}(\underset{\sim}{B}_1\times\underset{\sim}{B}_2\times\cdots\times\underset{\sim}{B}_n)$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda F^{-1}\left((\underset{\sim}{B}_1)_\lambda\times(\underset{\sim}{B}_2)_\lambda\times\cdots\times(\underset{\sim}{B}_n)_\lambda\right)$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda F^{-1}\left((\underset{\sim}{B}_1)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\times(\underset{\sim}{B}_2)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\times\cdots\times(\underset{\sim}{B}_n)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\right)$$

多元扩张原理可以将实数集 R 上的二元运算“$*$”扩张成 R 上模糊集间的相应运算“$*$”.

设映射 $\quad *: R\times R\rightarrow R$

$$(x,y)\mapsto z=*(x,y)=x^*y$$

根据多元扩张原理有 $\quad *:\mathscr{F}(R)\times\mathscr{F}(R)\rightarrow\mathscr{F}(R)$

$$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\mapsto *(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A}^*\underset{\sim}{B}$$

则 $\underset{\sim}{A}^*\underset{\sim}{B}$ 的隶属函数为 $\quad (\underset{\sim}{A}^*\underset{\sim}{B})(z)=\bigvee_{x^*y=z}(\underset{\sim}{A}(x)\times\underset{\sim}{B}(y))$

5.4 模糊数

作为扩展原理的应用，这一节介绍实数域 X 上的模糊数及其运算.

5.4.1 区间数

定义 5-6 设 X 为实数域,区间 $I \subseteq X$ 称为区间数;而闭区间 $I=[a,b]$ 称为闭区间数. 特别地,当 $0 < a \leqslant b$ 时,$[a,b]$ 称为正区间数;当 $a \leqslant b < 0$ 时,$[a,b]$ 称为负区间数.

一般区间数的运算较复杂些，这里仅介绍闭区间数的运算.

定义 5-7 设 $\overline{X}$ 为 X 上全体闭区间数的集合,$I_1=[a,b]$、$I_2=[c,d] \in \overline{X}$,且设 $*: X \times X \to X$ 是一个二元运算,由经典扩张原理,我们有

$$
\begin{aligned}
I_1 * I_2 &= [a,b] * [c,d] \\
&= \{x \mid \exists (x_1,x_2) \in [a,b] \times [c,d], \text{使 } x = x_1 * x_2\}
\end{aligned}
$$

若所得结果仍是闭区间数，则称给出了 $\overline{X}$ 的一个运算 $*$.

由此定义可得闭区间数的四则运算:

$$I_1 + I_2 = [a+c,\ b+d]; \quad I_1 - I_2 = [a-d,\ b-c]$$

$$I_1 \times I_2 = [\min(ac,\ ad,\ bc,\ bd),\ \max(ac,\ ad,\ bc,\ bd)]$$

$$I_1 \div I_2 = \left[\min\left(\frac{a}{c},\ \frac{a}{d},\ \frac{b}{c},\ \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c},\ \frac{a}{d},\ \frac{b}{c},\ \frac{b}{d}\right)\right] (0 \overline{\in} I_2)$$

另外还有如下运算:

$$[a,\ b] \wedge [c,\ d] = [a \wedge c,\ b \wedge d]$$

$$[a,\ b] \vee [c,\ d] = [a \vee c,\ b \vee d]$$

例 5-9 设 $[2,\ 3]$, $[1,\ 5]$ 为两区间数，求 $[2,\ 3] - [1,\ 5]$ 及 $[2,\ 3] \div [1,\ 5]$.

解 $$[2, 3] - [1, 5] = [-3, 2]$$

$$[2,3]\div[1,5]=[0.4,3]$$

5.4.2 凸模糊集

定义 5-8 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$，若对任意实数 $x\leqslant z\leqslant y$ 都有

$$\underset{\sim}{A}(z)\geqslant\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{A}(y)$$

则 $\underset{\sim}{A}$ 称为凸模糊集.

凸模糊集的图形见图 5-2（a）.

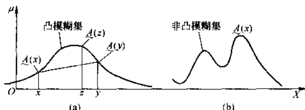


图 5-2 X 中的凸及非凸模糊集

由图可见凸模糊集的隶属函数的图形不一定是凸弧.

凸模糊集有如下性质：

性质 5-3 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$，$\underset{\sim}{A}$ 为凸模糊集的充要条件是 $\underset{\sim}{A}$ 的截集 A_λ 均为区间.

证 先证必要性. 设 $\underset{\sim}{A}$ 为凸模糊集，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，若 x、$z\in A_\lambda$（不妨设 $x<z$），亦即

$$\underset{\sim}{A}(x)\geqslant\lambda,\underset{\sim}{A}(z)\geqslant\lambda$$

则对 $\forall y\in[x,z]$，由凸模糊集的定义，应有

$$\underset{\sim}{A}(y)\geqslant\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{A}(z)\geqslant\lambda$$

从而 $y\in A_\lambda$. 这表明，若 x、$z\in A_\lambda$，则以 x，z 为端点的整个区间亦被包含在 A_λ 中，因此 A_λ 只能是一个区间.

再证充分性. 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$，它的任意截集 A_λ 都是区间，

任给 $x<y<z$，取 $\lambda = \underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{A}(z)$，则有 $x \in A_\lambda$，$z \in A_\lambda$. 因 A_λ 是区间，故 $y \in A_\lambda$，亦即

$$\underset{\sim}{A}(y) \geqslant \lambda = \underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{A}(z)$$

故 $\underset{\sim}{A}$ 是凸模糊集.

性质 5-4 设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 是凸模糊集，则 $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ 也是凸模糊集.

证 因为 $(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$，而 A_λ、B_λ 均为区间，区间之交仍为区间，所以 $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ 的截集均为区间，由性质 5-3 知 $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ 也是凸模糊集.

下面给出有界模糊集及闭模糊集的概念.

定义 5-9 设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(X)$，若对 $\forall \lambda \in [0, 1]$，$A_\lambda$ 均为闭集，则 $\underset{\sim}{A}$ 称为闭模糊集；若对 $\forall \lambda \in [0, 1]$，$A_\lambda$ 均为有界集，则 $\underset{\sim}{A}$ 称为有界模糊集.

定理 5-5 $\underset{\sim}{A}$ 为有界闭凸模糊集的充要条件是 $\forall \lambda \in [0,1]$，$A_\lambda$ 均为闭区间数.

证明略.

显见，一般区间数是凸模糊集，闭区间是有界闭凸模糊集.

5.4.3 模糊数

5.4.3.1 模糊数定义

定义 5-10 X 上的正规凸模糊集称为模糊数，正规闭凸模糊集称为闭模糊数，正规有界闭凸模糊集称为有界闭模糊数.

由定义可知，普通的实数是模糊数，区间数是模糊数，闭区间是有界闭模糊数. 因此，模糊数是区间数的推广，而区间数是模糊数的特例.

定义 5-11 设 $\underset{\sim}{I}$ 为模糊数，若当 $x \leqslant 0$ 时，$\underset{\sim}{I}(x) \equiv 0$，则 $\underset{\sim}{I}$ 称为正模糊数；若当 $x \geqslant 0$ 时，$\underset{\sim}{I}(x) \equiv 0$，则称 $\underset{\sim}{I}$ 为负模糊

数；且定义：

$$(-\underset{\sim}{I})(x) = \underset{\sim}{I}(-x)$$

$$\left(\frac{1}{\underset{\sim}{I}}\right)(x) = \underset{\sim}{I}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\underset{\sim}{I} \text{ 为非负模糊数,即 } 0 \bar{\in} \operatorname{Supp} \underset{\sim}{I})$$

例 5-10 设 $\underset{\sim}{2} = \int_1^2 \frac{(x-1)}{x} + \int_2^3 \frac{(3-x)}{x}$，则

$$-\underset{\sim}{2} = \int_{-1}^{-2} \frac{(-x-1)}{x} + \int_{-2}^{-3} \frac{(3+x)}{x}$$

$$\frac{1}{\underset{\sim}{2}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x} + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x}$$

例 5-11 取论域 U 为非负整数集，把模糊数的定义域限制在 U 上，便得到模糊正整数，如

$$\underset{\sim}{1} \triangleq \frac{0.2}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.2}{2}$$

$$\underset{\sim}{2} \triangleq \frac{0.8}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3}$$

$$\underset{\sim}{4} \triangleq \frac{0.2}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{5} + \frac{0.2}{6}$$

定理 5-6 $\underset{\sim}{A}$ 为有界闭模糊数，当且仅当它具有如下形式的隶属函数

$$\underset{\sim}{A}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [m,n] \neq \varnothing \\ L(x), & x < m \\ R(x), & x > n \end{cases}$$

其中 $L(x)$ 为增函数，右连续，$0 \leqslant L(x) < 1$ 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} L(x) = 0$；$R(x)$ 为减函数，左连续，$0 \leqslant R(x) < 1$ 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x) = 0$.

证明略.

5.4.3.2 模糊数的运算

定义 5-12 设 $*$：$X\times X\to X$ 是一个二元运算，$\underset{\sim}{I}$、$\underset{\sim}{J}$ 是两个模糊数，由扩张原理Ⅱ，规定 $\underset{\sim}{I} * \underset{\sim}{J}$ 仍是一个模糊数，此模糊数的隶属函数定义为

$$(\underset{\sim}{I} * \underset{\sim}{J})(z) \triangleq \bigvee_{x * y = z} (\underset{\sim}{I}(x) \wedge \underset{\sim}{J}(y))$$

由此定义模糊数的四则运算为

$$(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{J})(z) = \bigvee_{x+y=z} (\underset{\sim}{I}(x) \wedge \underset{\sim}{J}(y))$$

$$= \bigvee_{x\in X} (\underset{\sim}{I}(x) \wedge \underset{\sim}{J}(z-x))$$

$$(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{J})(z) = \bigvee_{x-y=z} (\underset{\sim}{I}(x) \wedge \underset{\sim}{J}(y))$$

$$= \bigvee_{x\in X} (\underset{\sim}{I}(x) \wedge \underset{\sim}{J}(x-z))$$

$$(\underset{\sim}{I} \times \underset{\sim}{J})(z) = \bigvee_{x\times y=z} (\underset{\sim}{I}(x) \wedge \underset{\sim}{J}(y))$$

$$= \begin{cases} \bigvee_{x\in X}\left(\underset{\sim}{I}(x) \wedge \underset{\sim}{J}\left(\frac{z}{x}\right)\right), & z \neq 0 \\ \left(\bigvee_{x\in X}(\underset{\sim}{I}(x) \wedge \underset{\sim}{J}(0))\right) \vee \left(\bigvee_{y\in X}(\underset{\sim}{I}(0) \wedge \underset{\sim}{J}(y))\right), & z = 0 \end{cases}$$

$$(\underset{\sim}{I} \div \underset{\sim}{J})(z) = \bigvee_{\frac{x}{y}=z} (\underset{\sim}{I}(x) \wedge \underset{\sim}{J}(y))$$

$$= \bigvee_{y\in \mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{J}} (\underset{\sim}{I}(zy) \wedge \underset{\sim}{J}(y))(0 \overline{\in} \mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{J})$$

当论域为有限时，模糊数的四则运算可采用表格式进行，下面通过例子说明.

例 5-12 设 $\underset{\sim}{4} = \frac{0.2}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{5} + \frac{0.2}{6}$

$$\underset{\sim}{2} = \frac{0.8}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3}$$

求 $\underset{\sim}{4}+\underset{\sim}{2}$，$\underset{\sim}{4}-\underset{\sim}{2}$，$\underset{\sim}{4}\times\underset{\sim}{2}$，$\underset{\sim}{4}\div\underset{\sim}{2}$.

解 列表计算（见表5-1).

表5-1 模糊数四则运算$\left(\frac{\wedge}{*}\right)$

$\underset{\sim}{2}$ \ $\underset{\sim}{4}$	$\frac{0.2}{2}$	$\frac{0.8}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0.8}{5}$	$\frac{0.2}{6}$
$\frac{0.8}{1}$	$\frac{0.2}{3,1,2,2}$	$\frac{0.8}{4,2,3,3}$	$\frac{0.8}{5,3,4,4}$	$\frac{0.8}{6,4,5,5}$	$\frac{0.2}{7,5,6,6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{0.2}{4,0,4,1}$	$\frac{0.8}{5,1,6,3/2}$	$\frac{1}{6,2,8,2}$	$\frac{0.8}{7,3,10,5/2}$	$\frac{0.2}{8,4,12,3}$
$\frac{0.8}{3}$	$\frac{0.2}{5,-1,6,2/3}$	$\frac{0.8}{6,0,9,1}$	$\frac{0.8}{7,1,12,4/3}$	$\frac{0.8}{8,2,15,5/3}$	$\frac{0.2}{9,3,18,2}$

(1) 把 $\underset{\sim}{4}$ 与 $\underset{\sim}{2}$ 分别写入第一行与第一列；

(2) 计算 $\underset{\sim}{4}$ (x) $\wedge$ $\underset{\sim}{2}$ (y) $=a_z$，写入 x 与 y 交叉处横线的上方；

(3) 计算 $x*y$，写入 x 与 y 交叉处横线的下方（横线下方的4个数依次为 $x+y$，$x-y$，$x\times y$，$x\div y$ 的值）；

(4) 计算 $\bigvee\limits_{x*y=z} a_z$，即对相同的各个 z 对应的横线上方的数取最大者，便可得该元素 z 的隶属度$(\underset{\sim}{4}*2)(z)$，比如

$$(\underset{\sim}{4}+\underset{\sim}{2})(5)=0.2\vee 0.8\vee 0.8=0.8$$

于是由表5-1得

$$\underset{\sim}{4}+\underset{\sim}{2}=\frac{0.2}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{1}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{0.8}{8}+\frac{0.2}{9}=\underset{\sim}{6}$$

$$\underset{\sim}{4}-\underset{\sim}{2}=\frac{0.2}{(-1)}+\frac{0.8}{0}+\frac{0.8}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.2}{5}=\underset{\sim}{2}$$

$$\underset{\sim}{4}\times\underset{\sim}{2}=\frac{0.2}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{0.8}{6}+\frac{1}{8}+\frac{0.8}{9}$$

$$+\frac{0.8}{10}+\frac{0.8}{12}+\frac{0.8}{15}+\frac{0.2}{18}$$

$$\underset{\sim}{4} \div \underset{\sim}{2} = \frac{0.2}{(2/3)} + \frac{0.8}{1} + \frac{0.8}{(4/3)} + \frac{0.8}{(3/2)} + \frac{0.8}{(5/3)} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{(5/2)} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.8}{5} + \frac{0.2}{6}$$

例 5-13 设 $\underset{\sim}{A}$ 为 X 上的模糊集，且

$$\underset{\sim}{A}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}x + \frac{\sigma - a}{\sigma}, & a - \sigma \leqslant x \leqslant a \\ -\frac{1}{\sigma}x + \frac{\sigma + a}{\sigma}, & a < x \leqslant a + \sigma \end{cases}$$

其中,a,σ 为实数,并省略了 $\underset{\sim}{A}(x) = 0$ 的区间. 证明 $\underset{\sim}{A}$ 为模糊数(此模糊数称为三角模糊数,记为 $t(a,\sigma)$,σ 称为 $t(a,\sigma)$ 的模糊度).

证 易见 $\underset{\sim}{A}(a) = 1$,因而 $\underset{\sim}{A}$ 为正规模糊集. 此外,对 $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$A_\lambda = [a - \sigma(1-\lambda), \quad a + \sigma(1-\lambda)]$$

为闭区间数，由性质 1，$\underset{\sim}{A}$ 为凸模糊集，故 $\underset{\sim}{A}$ 为模糊数.

可以证明，对于 $t(a_1,\sigma_1)$，$t(a_2,\sigma_2)$，有

(1) $t(a_1,\sigma_1) + t(a_2,\sigma_2) = t(a_1 + a_2,\ \sigma_1 + \sigma_2)$

(2) $\alpha t(a_1,\sigma_1) = t(\alpha a_1, \alpha\sigma_1)$

下面我们给出系统（两个以上的对象相互联系、相互作用而形成的具有特定功能的整体）模糊度的概念.

定义 5-13 设 $\underset{\sim}{P}_i \in \mathscr{F}(X)(i = 0,1,\cdots,k)$ 为三角模糊数，

$$\underset{\sim}{P}_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - \beta_i|}{s_i}, & \beta_i - s_i \leqslant x \leqslant \beta_i + s_i \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中$\beta_i,s_i(i = 0,1,\cdots,k)$ 为实数,且这 $k+1$ 个三角模糊数构成一个系统,记为 $P = \{\underset{\sim}{P}_0, \underset{\sim}{P}_1, \cdots, \underset{\sim}{P}_k\}$,又设 $\omega = \{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_k\}$ 为给定的一组权重,

$$s = \sum_{i=0}^{k} \omega_i s_i$$

称为系统 P 在 ω 之下的模糊度.

系统模糊度的权重可通过专家评定获得.

5.4.3.3 *L-R* 模糊数及其运算

L-R 模糊数是一类特殊的模糊数，它的四则运算，取大取小运算比一般模糊数更为方便.

定义 5-14 设 L 是实数域 R 到 $[0,1]$ 的映射

$$L:R \to [0,1]$$
$$x \mapsto L(x)$$

若 L 满足以下条件:

(1) $L(x) = L(-x)$

(2) $L(0) = 1$

(3) $L(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减

则称 $L(x)$ 为模糊数的基准函数.

以下的函数都可作为基准函数，满足定义规定的条件.

(1) $L(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$

(2) $L(x) = \max\left\{0, 1 - |x|^p\right\}, p \geqslant 0$

(3) $L(x) = e^{-|x|^p}, p \geqslant 0$

(4) $L(x) = \dfrac{1}{1 + |x|^p}, p \geqslant 0$

定义 5-15 设 $L(x)$、$R(x)$ 为模糊数的基准函数，若

$$\underset{\sim}{A}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & x \leqslant m, (\alpha > 0) \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & x > m, (\beta > 0) \end{cases}$$

则称 $\underset{\sim}{A}$ 为 *L-R* 模糊数，记为 $\underset{\sim}{A} = (m;\ \alpha,\ \beta)_{LR}$，其中 L，R 分别为左、右基准函数，m 称为均值，α，β 分别称为左、右分布.

约定 $\alpha=\beta=0$ 时，L-R 模糊数 $\underset{\sim}{A}$ 变为通常的实数，即 $(m;0,0)_{LR}=m$.

例如设 $\underset{\sim}{2}$ 和 $\underset{\sim}{3}$ 的隶属函数分别为

$$\underset{\sim}{2}(x)=\begin{cases}x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 3-x, & 2<x\leqslant 3\end{cases} \text{和} \ \underset{\sim}{3}(y)=\begin{cases}y-2, & 2\leqslant y\leqslant 3\\ 4-y, & 3<y\leqslant 4\end{cases}$$

$\underset{\sim}{2}$ 和 $\underset{\sim}{3}$ 均为 L-R 型模糊数，其基准函数均为

$$L(x)=R(x)=\max\left\{0,\quad 1-|x|\right\}=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

左、右分布均为 $\alpha=\beta=1$，$\underset{\sim}{2}$ 和 $\underset{\sim}{3}$ 的均值分别为 $m=2$ 和 $m=3$，

因此 $\quad \underset{\sim}{2}=(2;1,1)_{LR}$，$\underset{\sim}{3}=(3;1,1)_{LR}$

按照模糊数运算的定义，可以证明 L-R 型模糊数运算满足下面规则：

设 $\underset{\sim}{A}=(m;\alpha,\beta)_{LR}$，$\underset{\sim}{B}\ (n;\gamma,\delta)_{LR}$. 首先给出一个定义：

定义 5-16 $\lambda\in R$，$\lambda\neq 0$，$\underset{\sim}{A}$ 是模糊数，令

$$(\lambda\underset{\sim}{A})(x)=\underset{\sim}{A}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

称 $\lambda\underset{\sim}{A}$ 为模糊数 $\underset{\sim}{A}$ 与 λ 的数乘.

(1) $\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}=(m+n;\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR}$

(2) $\lambda\underset{\sim}{A}=\begin{cases}(\lambda m;\lambda\alpha,\lambda\beta)_{LR}, & \lambda>0\\ (\lambda m;-\lambda\beta,-\lambda\alpha)_{RL}, & \lambda<0\end{cases}$

(3) $\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}=(m;\alpha,\beta)_{LR}+(-n;\delta,\gamma)_{RL}$

当基准函数 $L(x)\neq R(x)$ 时，$\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}$ 不再是 L-R 模糊数；

当基准函数 $L(x)=R(x)$ 时，$\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}=(m-n;\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR}$.

(4) L-R 型模糊数的乘积不再是 L-R 型模糊数，可以把它们

近似表示成 L-R 模糊数：

$m>0, n>0$ 时 $\quad \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}\approx(mn;m\gamma+n\alpha, m\delta+n\beta)_{LR}$

$m<0, n>0$ 时 $\quad \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}\approx(mn;n\alpha-m\delta, n\beta-m\gamma)_{LR}$

$m<0, n<0$ 时 $\quad \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}\approx(mn;-n\alpha-m\delta,-n\beta-m\gamma)_{LR}$

(5) $\underset{\sim}{A}\vee\underset{\sim}{B}\approx(m\vee n;\alpha\wedge\gamma,\beta\vee\delta)_{LR}$（或 $\underset{\sim}{A}\vee\underset{\sim}{B}=\widetilde{\max}(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$）

$\underset{\sim}{A}\wedge\underset{\sim}{B}\approx(m\wedge n;\alpha\vee\gamma,\beta\wedge\delta)_{LR}$（或 $\underset{\sim}{A}\wedge\underset{\sim}{B}=\widetilde{\min}(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$）

(6) $\underset{\sim}{A}\leqslant\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}\vee\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow m\leqslant n,\alpha\geqslant\gamma,\beta\leqslant\delta$

习 题 5

1. 设

$$R=\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & \\ & \end{matrix}\begin{pmatrix}0.6 & 0.5 & 0\\0.8 & 0.9 & 1\\0.3 & 0.4 & 0.2\\0.5 & 0.9 & 0.1\\0.4 & 0.5 & 0.3\end{pmatrix}\begin{matrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{matrix},\quad Q=\begin{array}{c}\begin{matrix}v_1 & v_2 & v_3\end{matrix}\\\begin{pmatrix}0.4 & 0.5 & 1\\0.7 & 0.9 & 0\\0.4 & 0.3 & 0.1\\0.4 & 0.9 & 0.2\\0.3 & 0.6 & 0.7\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{matrix}$$

求 $(\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{Q})_U$，$(\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{Q})_V$，以及 $\underset{\sim}{R}$ 在 V 的全部截影.

2. 设 $X=Y$ 为实数域，$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(X\times Y)$：且

$$\underset{\sim}{R}(x,y)=\frac{1}{1+k(x-y)^2}\quad(k>1)$$

(1) 求 $\underset{\sim}{R}_X$，$\underset{\sim}{R}_Y$；

(2) 求 $\underset{\sim}{R}\mid_{x=0}$，$\underset{\sim}{R}\mid_{y=0}$，$\underset{\sim}{R}\mid_{x=1}$，$\underset{\sim}{R}\mid_{y=1}$.

3. R 如例5-5所给，试写出 $\underset{\sim}{R}_U$，$\underset{\sim}{R}_V$，$\underset{\sim}{R}\mid_{v=1.7}$，$\underset{\sim}{R}\mid_{u=60}$. 并解释它们的实际意义.

4. 证明：

(1) $R|_x = ((\{x\} \times Y) \cap R)_Y,\ R \in \mathscr{P}(X \times Y)$

(2) $\underset{\sim}{R}|_x = ((\{x\} \times Y) \cap \underset{\sim}{R})_Y,\ \underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(X \times Y)$

5. 验证下列等式是否成立，成立的证明，不成立的举反例：

(1) $(\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{Q})_U = \underset{\sim}{R}_U \cup \underset{\sim}{Q}_U$　　(2) $(\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{Q})_U = R_U \cap Q_U$

(3) $(\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{Q})|_u = \underset{\sim}{R}|_u \cap \underset{\sim}{Q}|_u$　　(4) $(\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{Q})|_u = \underset{\sim}{R}|_u \cap \underset{\sim}{Q}|_u$

(5) $(\underset{\sim}{R}^c)_U = (\underset{\sim}{R}_U)^c$　　(6) $(\underset{\sim}{R}^c)|_u = (\underset{\sim}{R}|_u)^c$

6. 设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，$R \in \mathscr{F}(U \times V)$，且

$$R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 & 1 \\ 1 & 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0.6 & 0.8 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underset{\sim}{T}_R$ 为由 R 诱导的 U 到 V 的模糊变换.

(1) $A = \{u_2, u_4\}$，求 $\underset{\sim}{T}_R(A)$；

(2) $\underset{\sim}{A} = 0.5/u_1 + 0.6/u_2 + 0.9/u_3 + 1/u_4$，求 $\underset{\sim}{T}_R(\underset{\sim}{A})$.

7. 设 $U = \{1,2,\cdots,6\}$，$V = \{a,b,c,d\}$，

$$f(u) = \begin{cases} a, & u = 1, 2, 3 \\ b, & u = 4, 5 \\ c, & u = 6 \end{cases}$$

并设 $\underset{\sim}{A} = 1/1 + 0.2/3 + 0.1/5 + 0.9/6$，试确定 $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})$，$\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B})$ ($\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A})$).

8. 设 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$，$V = \{x, y, z\}$

$$f(u) = v = \begin{cases} x, & u = a, d, e, f \\ y, & u = b, c \end{cases}$$

且 $\underset{\sim}{A}_1 = 0.8/a + 0.2/b + 1/c + 0.6/e + 0.3/f$，$\underset{\sim}{A}_2 = 1/a + 0.8/b + 0.5/c + 0.4/f$，试确定 $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2)$，$\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2)$ 及 $\underset{\sim}{F}^{-1}(B)$ ($B = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2)$).

9. 设 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$，且

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.3}{2}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.8}{5},\quad \underset{\sim}{B}=\frac{0.9}{2}+\frac{0.4}{4}$$

试求 $\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B}$.

10. 设 $U=\{0,1,2,\cdots\cdots,n\}$，$f:U\times U\to U$，即 f 为“+”，

$\underset{\sim}{A}_1=$ “近似于1” $=\frac{0.3}{0}+\frac{1}{1}+\frac{0.3}{2}$，记为 $\underset{\sim}{1}$.

$\underset{\sim}{A}_2=$ “近似于2” $=\frac{0.2}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.2}{3}$，记为 $\underset{\sim}{2}$.

试求 $\underset{\sim}{A}_1+\underset{\sim}{A}_2$.

11. 设 $\underset{\sim}{a}\in\mathscr{F}(X)$（$X$ 为实数域），且

$$\underset{\sim}{a}(x)=e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$$

证明 $\underset{\sim}{a}(x)$ 为模糊数（此模糊数称为正态模糊数）.

12. 设 $\underset{\sim}{a}$、$\underset{\sim}{b}$ 都是正态形模糊数，

$$\underset{\sim}{a}(x)=e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}},\quad \underset{\sim}{b}(x)=e^{-\frac{(x-b)^2}{\sigma_2^2}}$$

证明 $\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}$ 与 $\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b}$ 也是正态形模糊数.

第 6 章　确定隶属函数的方法

隶属函数是建立模糊集的基石，它在模糊数学中占有突出的地位，隶属函数的确定，无论从理论上还是实践上都是模糊数学及其应用的基本而关键的问题．本章介绍确定隶属函数的原则和方法．

6.1　确定隶属函数的原则

论域 U 上的模糊集的隶属函数就是 U 到 $[0,1]$ 的一个实值函数，并没有附加任何条件，范围相当广泛．因此确定隶属函数的方法是多种多样的，并没有统一的模式．

模糊集在理论上可分为本质模糊集和非本质模糊集．比如，描述人的意识的模糊集就为本质模糊集，而在信息不充分的条件下反映决策者主观判断的模糊集就为非本质模糊集（因为在信息完全时可以去掉模糊性而清晰化）．我们在构造不同模糊集的隶属函数时，必须充分注意到这一点，并采用不同的手段来加以描述．这样就更增加了构造隶属函数过程的复杂性和方法的多样性．

确定隶属函数的过程，本质上是客观的，但又容许有一定的人为技巧．不过这并不意味着可以主观臆造．因为一个模糊集一般说来是联系着某一个模糊概念，而概念是人的主观意识对客观事物认识过程的产物．确定一个元素对一个模糊集的隶属度，就必然会体现出人的主观意识对客观事物的一种判定或信度，它是主观的；同时，概念又是客观事物在人的头脑中的反映，它要受客观的制约和限定，从这一点上看它又是客观的．比如，由多个有一定水平的裁判员，各自对一个体操表演者评分，一般其结果不会出现多大差别．因为每一个评分，都是对表演者水平的一种

度量，主要受到表演者实际水平的制约，所以它是客观的，但同时也会受到裁判员主观认识的制约，所以它又是主观的．因此在构造隶属函数的过程中，应充分注意到这种主观性和客观性的辩证统一，力求做到使我们构造的隶属函数能够较全面的反映事物的本质．

确定隶属函数的一数原则如下：

（1）若模糊集反映的是社会的一般意识，它是大量的可重复表达的个别意识的平均结果，例如，青年人，经济增长快，生产正常等；则此时采用模糊统计法（见6.3节）来求隶属函数较为理想；

（2）如果模糊集反映的是某个时间段内的个别意识、经验和判断，例如，某专家对某个项目可行性的评价；那么，对这类问题可采用 Delphi 法（见6.2节）；

（3）若模糊集反映的模糊概念已有相应成熟的指标，这种指标经过长期实践检验已成为公认的对事物的真实的又是本质的描述，则可直接采用这种指标，或者通过某种方式将这种指标转化为隶属函数；

（4）对某些模糊概念，虽然直接给出其隶属函数比较困难，但却可以比较两个元素相应的隶属度，此时可用相对选择法（见6.4节）求得隶属函数；

（5）若一个模糊概念是由若干个模糊因素复合而成的，则可先求各因素模糊集的隶属函数，再综合出模糊概念的隶属函数．

需要特别指出的是，隶属函数应通过实践检验，利用信息反馈，不断进行调整，使隶属函数的形成成为一种学习的过程，以求达到相对稳定的状态．

对于如何建立隶属函数，一开始就引起了模糊数学界的充分重视，国内外的研究工作者做了大量的工作，取得了一定的成绩，目前已提出了不少的方法，由于这些方法是人们从不同的侧面，根据不同的需要提出的，各有侧重，因此本书不准备把所有

的方法一一介绍，只将一些常用的方法做一介绍.

6.2 Delphi 法

设 U 为论域，$\underset{\sim}{A}$ 是 U 上待确定其隶属函数的模糊集，用 Delphi 法求 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数 $\underset{\sim}{A}(u)$ 的步骤如下：

（1）提出影响 $\underset{\sim}{A}$ 的主要因素，连同较为详尽的资料发送选定的 n 位专家，请专家对于取定的 $u_0 \in U$，给出隶属度 $\underset{\sim}{A}(u_0)$ 的估计值 m.

（2）设第 i 位专家第一次给出的估计值为 $m_{1i}(i=1, 2, \cdots, n)$. 对于

$$m_{11}, m_{12}, \cdots, m_{1n}$$

计算平均值 $\bar{m}_1$ 和离差 d_1：

$$\bar{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{1i}$$

$$d_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left| m_{1i} - \bar{m}_1 \right|^2$$

（3）不记名将全部数据

$$m_{11}, m_{12}, \cdots, m_{1n}, \bar{m}_1, d_1$$

送交每位专家，同时附上进一步的补充资料，请每位专家在阅读和思考之后，给出新的估计值：

$$m_{21}, m_{22}, \cdots, m_{2n}$$

（4）重复2、3步，直至离差值小于或等于预先给定的标准 $\varepsilon > 0$. 设重复 k 次后，有 $d_k \leqslant \varepsilon$，这里 d_k 为重复 k 次后的离差.

（5）将第 k 次得到的对 $\underset{\sim}{A}(u_0)$ 的平均估计值 $\bar{m}_k$ 和 d_k 再交给各位专家，请他们做最后的“判断”，给出估计值

$$m_1, m_2, \cdots, m_n$$

其中 m_i 是第 i 位专家的估计值，并请每个人标出各自对所作估

计值的信任度，记为

$$e_1, e_2, \cdots, e_n$$

这里 e_i 表示第 i 位专家对自己的估计的把握程度，并且规定 $e_i \in [0, 1]$，第 i 位专家有绝对把握时，$e_i = 1$；毫无把握时，取 $e_i = 0$；其他情形，取 $0 < e_i < 1$. 专家的信任度是一个心理指标，它取决于专家对资料和信息的占有程度，取决于论据的充分性，取决于专家的经验与信念.

（6）计算

$$\bar{m} = \frac{1}{|M_\lambda|}\sum_{i \in M_\lambda} m_i$$

其中 $M_\lambda = \{i \mid e_i \geqslant \lambda; i = 1,2,\cdots,n\}$，$|M_\lambda|$ 表示集合 M_λ 的元素个数，而 $\lambda \in [0,1]$ 是事先给定的标准.

最后以 $\bar{m}$ 作为 $\underset{\sim}{A}(u_0)$ 的估计值. 或直接计算

$$\bar{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$$
$$\bar{e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i \tag{6.1}$$

此时 $\bar{m}$ 称为 $\underset{\sim}{A}(u_0)$ 在信任度 $\bar{e}$ 下的估计值，若 $\bar{e}$ 较高，从而达到标准，则 $\underset{\sim}{A}(u_0)$ 取作 $\bar{m}$. 否则，虽可暂时使用 $\bar{m}$，但要特别注意信息反馈，不断通过“学习过程”完善 $\underset{\sim}{A}(u_0) = \bar{m}$.

式（6.1）是以参加估值的全体专家具有平等的学术地位为前提的. 如果专家们的学术地位各不相同，可用不同的权重分配代替均权，即计算

$$\bar{m} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i m_i$$

$$\bar{e} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e_i$$

其中 $\omega_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，且 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Delphi 法特别适用于有限论域上的模糊集，即模糊向量的估计，且最好是让专家一次给出对各元素隶属度的估计值，即设

$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$$

$$\underset{\sim}{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathscr{F}(U)$$

让专家一次给出对 a_1，a_2，…，a_k 的各估计值，这要比单个估计 a_i 效果好；其原因在于整体估计是在比较中进行的，使得决断容易做出，还使得各个估计值相互协调.

6.3 模糊统计法

6.3.1 模糊统计法

6.3.1.1 概率统计法

在介绍模糊统计法之前，先简单回顾一下概率统计法，这对我们掌握模糊统计法是很有帮助的.

学过概率的人都知道，所谓概率统计法是通过进行随机试验来求得事件概率的一种方法，在概率统计随机试验中有四个要素：

(1) 样本空间 Ω，它是随机试验中所有基本事件组成的集合；

(2) 事件 A，它是 Ω 上的一个确切的普通集合；

(3) Ω 中的变元 ω，它是一个随机变量；

(4) 条件 S，它是对变元 ω 的活动的一个限制范围.

随机性的焦点是 ω 在 S 内有随机变动余地，而且

$$S \cap A \neq \varnothing \qquad S \cap A^c \neq \varnothing$$

当 $\omega \in S \cap A$ 时，事件 A 发生，当 $\omega \in S \cap A^c$ 时，事件 A 不发生，故 A 是条件 S 之下的随机事件.

随机试验的目的是用确定的手段去研究这种不确定性.

随机试验最基本的要求是在每次试验中，事件 A 究竟发生

与否，必须是确定的，这就要求在每次试验中，ω 必须确定，从而 $\omega \in S \cap A$，$\omega \in S \cap A^c$ 必须有一成立.

随机试验的特点是在各次试验中 A 是固定的，ω 是变的.

计算概率的公式为

$$A \text{ 发生的频率} f_n \triangleq \frac{A \text{ 发生的次数 } n_A}{n}$$

其中 n 为试验次数.

实践表明，随着 n 的增大，通常会呈现频率稳定的现象，频率稳定所在的那个数，叫做事件 A 在条件 S 下的概率.

例 6-1 掷一颗骰子，试确定“出现偶数点且点数大于三”的概率.

解 设事件“出现偶数点且点数大于三”为 A. 在这个试验里，Ω: {一点，二点，三点，四点，五点，六点}，A: {四点，六点}，ω: $\omega \in$ {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

例如某人做此试验，其试验次数及数据见表 6-1.

表 6-1 试验次数及数据

n	1200	2000	4013
n_A	401	666	1301
f_n	0.3342	0.3330	0.3242

由此表可见，在条件 S 下，A 的频率在 1/3 附近摆动，实际上这是古典概率，可直接算出 $P(A) = 2/6 = 1/3$.

6.3.1.2 模糊统计法

模糊统计法，简单地说就是通过模糊试验来求得元素的隶属度的一种方法. 模糊试验也有四个要素：

(1) 论域 U，我们所论问题的范围；

(2) U 中的一个确定元素 u；

(3) U 中的一个随机运动的普通集合 A_*，A_* 联系着一个模糊集 $\underset{\sim}{A}$，A_* 的每一次确定，都是对相应于 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊概念的一

个确定划分，可以看作 $\underset{\sim}{A}$ 的一个显影，表示模糊概念的一个近似外延；

（4）条件 S，它联系着对模糊概念所进行的划分过程的全部客观的或心理的因素，制约着 A_* 的运动.

模糊统计法的基本要求是在每次试验中，对 u_0 是否属于 $\underset{\sim}{A}$ 作出确切判断，这就要求在每次试验中，A_* 必须确定.

模糊统计试验的特点是在各次试验中 u_0 是固定的，A_* 是变的，这是不同于随机试验的.

隶属度的计算公式为

$$u_0 \text{ 对 } \underset{\sim}{A} \text{ 的隶属频率} f_n \triangleq \frac{A_* \text{ 覆盖 } u_0 \text{ 的次数}}{n}$$

其中 n 为实验次数.

实践证明，随着 n 的增大，隶属频率也会呈现稳定性，称之为隶属频率稳定性，频率稳定所在的那个数，叫做 u_0 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度.

概率统计与模糊统计试验可用图 6-1 来直观说明.

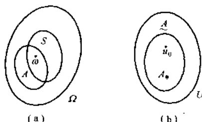


图 6-1　概率统计与模糊统计试验直观图

图 6-1(a)是概率统计试验的直观图，其中 A 不动，而 ω 变动；图 6-1(b)是模糊统计试验的直观图，其中 u_0 固定而 A_* 变动.

例 6-2　模糊统计试验的应用（参见文献［12］）.

设 $U=[0,100]$（单位：岁），$\underset{\sim}{A}$ 是“青年人”在 U 上的模糊集，

取 $u_0=27$，试用模糊统计试验来确定 u_0 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度.

解 这里引用文献［12］的资料，具体作法如下：

（1）选择129位合适的人选，让他们独自认真的考虑“青年人”的含义，然后分别报出各自认为“青年人”最适宜的年龄段（见表6-2）；

表 6-2 关于“青年人”年限的调查

18~25	17~30	17~28	18~25	16~35	14~25
18~30	18~35	18~35	16~25	15~30	18~35
17~30	18~25	18~25	20~30	18~30	16~30
20~35	18~30	18~30	18~35	15~25	18~30
15~28	16~28	18~30	18~30	16~30	18~35
18~25	18~25	16~28	18~30	16~30	16~28
18~35	18~35	17~27	16~28	15~28	16~30
19~28	15~30	15~26	17~25	15~36	18~30
17~30	18~35	16~35	15~25	15~25	18~28
16~30	15~28	18~35	18~30	17~28	18~35
15~28	18~30	15~25	15~25	18~30	16~24
15~25	16~32	15~27	18~35	16~25	18~28
16~28	18~30	18~35	18~30	18~30	17~30
18~30	18~35	16~30	18~35	17~25	15~30
18~25	17~30	14~25	18~26	18~29	18~35
18~28	18~30	18~25	16~35	17~29	18~25
17~30	16~28	18~30	16~28	15~30	15~35
15~30	20~30	20~30	16~25	17~30	15~30
18~30	16~30	18~28	18~35	16~30	15~30
18~35	18~35	18~30	17~30	16~35	17~30
15~25	18~35	15~30	15~25	15~30	18~30
17~25	18~29	18~28			

（2）统计年限区间覆盖 $u_0=27$ 的次数，结果见表6-3；

表 6-3 $u_0=27$ 对“青年”年限的隶属频率

N	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	129
隶属次数	6	14	23	31	39	47	53	62	68	76	85	95	101
隶属频率	0.60	0.70	0.77	0.78	0.78	0.78	0.76	0.78	0.76	0.76	0.75	0.79	0.78

(3) 把表6-3结果绘图（见图6-2）.

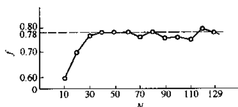


图6-2 $u_0=27$ 对“青年”隶属频率的稳定性

由图6-2可知，27岁对于青年年限的隶属频率大致稳定在0.78附近，故可取 $\underset{\sim}{A}(27)=0.78$.

利用模糊统计也可求出隶属函数曲线.

例6-3 $U=[0,100]$(单位:岁)，$\underset{\sim}{A}$ 是“青年人”在 U 上的模糊集，试用模糊统计求 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数曲线.

解 这里仍引用文献［12］的资料，具体作法如下：

(1) 先将 U 分组；

(2) 以每组的中值为代表，计算隶属频率，分组情况及计算结果见表6-4；

表6-4 分组计算隶属频率

序号	分 组	频数	隶属频率	序号	分 组	频数	隶属频率
1	13.5～14.5	2	0.0155	13	25.5～26.5	103	0.7984
2	14.5～15.5	27	0.2093	14	26.5～27.5	101	0.7829
3	15.5～16.5	51	0.3953	15	27.5～28.5	99	0.7674
4	16.5～17.5	67	0.5194	16	28.5～29.5	80	0.6202
5	17.5～18.5	124	0.9612	17	29.5～30.5	77	0.5969
6	18.5～19.5	125	0.9690	18	30.5～31.5	27	0.2093
7	19.5～20.5	129	1	19	31.5～32.5	27	0.2093
8	20.5～21.5	129	1	20	32.5～33.5	26	0.2016
9	21.5～22.5	129	1	21	33.5～34.5	26	0.2016
10	22.5～23.5	129	1	22	34.5～35.5	26	0.2016
11	23.5～24.5	129	1	23	35.5～36.5	1	0.0078
12	24.5～25.5	128	0.9922		Σ		13.6589

(3) 把表中的结果（年岁与隶属频率）在坐标平面上描点，连续地画出图形，便可得到“青年人”的隶属函数曲线(见图6-3(a)).

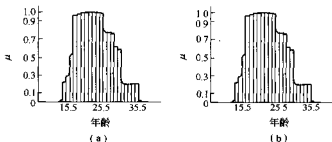


图6-3 “青年人”的隶属函数曲线

说明：

(1) 由于原始数据中青年年限的最低限为14，最高限为36，故只需把13.5～36.5分组即可.

(2) 分组多少，需由具体情况确定. 一般组分得越细，得到的曲线就越接近原始数据提供的信息.

(3) 表中的频数是由表6-2统计得到的. 比如第一组的中值为14，由统计表得到的数据知覆盖14的区间有2个，所以相应频数为2. 用2除以数据个数129，就得到相应的隶属频率0.0155，其余类推.

(4) 对于此项工作，有人曾在武汉大学、西安工业学院作过同样的试验，所得隶属函数曲线（见图6-3（b））大数相同，这说明，模糊统计方法是切实可行的.

(5) 在就人类自然语言中的模糊概念进行模糊统计时，必须遵循一个原则，即被调查人员一定要对模糊词汇的概念熟悉，并有用数量近似表达这一概念的能力，要求每一个被调查者都力求尽可能贴切地用一个确切集合来表达自己的模糊概念.

6.3.2 模糊分布

应用模糊统计法,可得到模糊集的隶属函数曲线,那么如何由隶属函数曲线来求得隶属函数呢?类似概率统计中的方法,我们可根据图形的形状,选取适当的函数表达式,就可得到隶属函数.为此,我们必须有一些可供选用的函数式,下面就给出一些最重要、最常用,并且带有参数的隶属函数及其图形,以供选取.

在模糊数学中,我们把论域为实数域的隶属函数称为模糊分布. 即若 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(X)$,其中 X 为实数集,便称 $\mu = \underset{\sim}{A}(x)$ 为模糊分布. 由于下面所给的函数表达式都是以实数域为论域的,所以它们都是模糊分布. 常见的模糊分布有:

(1) 矩形分布或半矩形分布:

①偏小型

$$\underset{\sim}{A}(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

见图 6-4 (a).

②偏大型

$$\underset{\sim}{A}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geqslant a \end{cases}$$

见图 6-4 (b).

③中间型

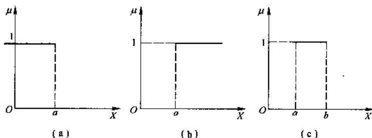


图 6-4 矩形分布

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

见图 6-4（c）.

此类分布适用确切概念；

(2) 半梯形分布与梯形分布：

①偏小型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x<a\\ \dfrac{b-x}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

见图 6-5（a）.

②偏大型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

见图 6-5（b）.

③中间型

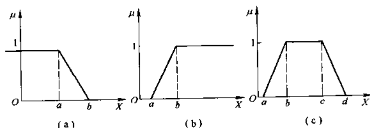


图 6-5　半梯形分布与梯形分布

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b\\ 1, & b\leqslant x<c\\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c\leqslant x<d\\ 0, & x\geqslant d\end{cases}$$

见图6-5（c）.

（3）K 次抛物线分布：

①偏小型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x<a\\ \left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^{k}, & a\leqslant x<b\\ 0, & x\geqslant b\end{cases}$$

见图6-6（a）.

②偏大型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^{k}, & a\leqslant x<b\\ 1, & x\geqslant b\end{cases}$$

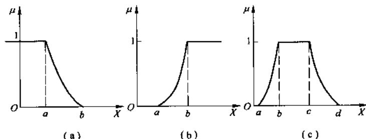


图6-6　抛物型分布

见图 6-6 (b).

③中间型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k, & a\leqslant x<b\\ 1, & b\leqslant x<c\\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right)^k, & c\leqslant x<d\\ 0, & x\geqslant d\end{cases}$$

见图 6-6 (c).

(4) Γ 型分布:

①偏小型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x<a\\ e^{-k(x-a)}, & x\geqslant a\end{cases}$$

其中 $k>0$，见图 6-7 (a)，图中 $a_0=a+1/k$.

②偏大型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1-e^{-k(x-a)}, & x\geqslant a\end{cases}$$

其中 $k>0$，见图 6-7 (b)，图中 $a_0=a+1/k$.

③中间型

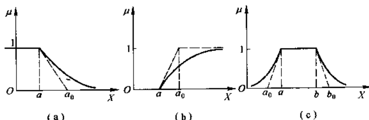


图 6-7 Γ 型分布

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}e^{k(x-a)}, & x<a\\ 1, & a\leqslant x<b\\ e^{-k(x-b)}, & x\geqslant b\end{cases}$$

其中 $k>0$，见图6-7（c），图中 $a_0=a-1/k$，$b_0=b+1/k$.

（5）正态分布：

①偏小型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a\\ e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & x>a\end{cases}$$

见图6-8（a）.

②偏大型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ 1-e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & x>a\end{cases}$$

见图6-8（b）.

③中间型

$$\underset{\sim}{A}(x)=e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$$

见图6-8（c），也可设

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & x<a\\ 1, & a\leqslant x\leqslant b\\ e^{-\left(\frac{x-b}{\sigma}\right)^2}, & x>b\end{cases}$$

（6）Cauchy 分布：

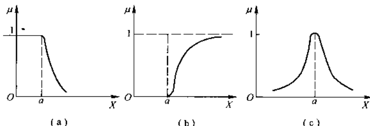


图6-8　正态分布

①偏小型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a\\ \dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^{\beta}}, & x>a\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$, $\beta>0$, 见图 6-9 (a).

②偏大型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^{-\beta}}, & x>a\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$, $\beta>0$, 见图 6-9 (b).

③中间型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\frac{1}{1+\alpha(x-a)^{\beta}}$$

其中 $\alpha>0$, β 为正偶数, 见图 6-9 (c).

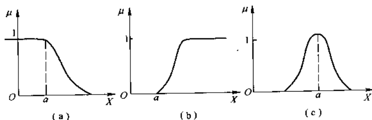


图 6-9　哥西分布

(7) 岭形分布:

①偏小型

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a_1\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2\\ 0, & x>a_2\end{cases}$$

见图 6-10(a), 图中 $a_0=(a_1+a_2)/2$.

②偏大型

$$
\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a_1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2\\ 1, & x>a_2\end{cases}
$$

见图6-10（b），图中 $a_0=(a_1+a_2)/2$.

③中间型

$$
\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a_1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2\\ 1, & a_2<x\leqslant a_3\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_4-a_3}\left(x-\dfrac{a_3+a_4}{2}\right), & a_3<x\leqslant a_4\\ 0, & x>a_4\end{cases}
$$

见图6-10（c）.

说明 用模糊数学去处理带有模糊性的问题时，选择适当的模糊分布函数是很重要的，如选择不当，则会远离实际情况，从

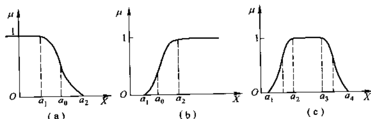


图6-10 岭形分布

而影响效果，各式中的参数由实际问题决定.

6.3.3 三分法

三分法也是用随机区间的思想来处理模糊性的试验模型，在某些场合适用此方法来求隶属函数. 下面通过一个例子来说明.

建立矮个子、中等个子与高个子三个模糊概念的隶属函数.

设论域 $U=(0,3)$（单位：m），$\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，$\underset{\sim}{A}_3$ 为 U 上的三个模糊集，其中 $\underset{\sim}{A}_1$：矮个子；$\underset{\sim}{A}_2$：中等个子；$\underset{\sim}{A}_3$：高个子.

又设 ζ 为矮个子与中等个子的分界点，η 为中等个子与高个子的分界点.

将 (ζ,η) 看作二维随机变量进行抽样调查，由所得到的数据求出 ζ，η 的概率分布，便可导出隶属函数 $\underset{\sim}{A}_i$（$i=1,2,3$），一般说来有如下结论.

定理6.1 设 (ζ,η) 是满足 $P(\zeta\leqslant\eta)=1$ 的连续随机向量. 对于 (ζ,η) 的每一个取点，都联系着一个映射

$$e_{(\zeta,\eta)}:X\to P_3=\{\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{A}_3\}$$

$$e_{(\zeta,\eta)}(x)=\begin{cases}\underset{\sim}{A}_1, & x\leqslant\zeta\\ \underset{\sim}{A}_2, & \zeta<x\leqslant\eta\\ \underset{\sim}{A}_3, & x>\eta\end{cases}$$

由此模糊统计试验所确定的 $\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，$\underset{\sim}{A}_3$ 的隶属函数分别为

$$\underset{\sim}{A}_1(x)=\int_x^{+\infty}p_\zeta(u)\mathrm{d}u$$

$$\underset{\sim}{A}_3(x)=\int_{-\infty}^{x}p_\eta(u)\mathrm{d}u$$

$$\underset{\sim}{A}_2(x)=1-\underset{\sim}{A}_1(x)-\underset{\sim}{A}_3(x)$$

其中 $p_\zeta(x)$，$p_\eta(x)$ 分别是 ζ，η 的边缘分布密度函数.

证明略.

通常ζ，η具有正态分布，如设

$$\zeta: N(a_1, \sigma_1^2),\ \eta: N(a_2, \sigma_2^2)$$

则上述隶属函数化为

$$\underset{\sim}{A}_1(x) = 1 - \Phi\left[\frac{(x - a_1)}{\sigma_1}\right]$$

$$\underset{\sim}{A}_3(x) = \Phi\left[\frac{(x - a_2)}{\sigma_2}\right]$$

$$\underset{\sim}{A}_2(x) = \Phi\left[\frac{(x - a_1)}{\sigma_1}\right] - \Phi\left[\frac{(x - a_2)}{\sigma_2}\right]$$

这里
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

6.4 增量法

下面举例说明如何用“增量法”来求隶属函数.

设论域$X = [0,200]$(单位:岁),又设$\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(X)$,且定义$\underset{\sim}{A}$为“老年”,求其属函数$\underset{\sim}{A}(x)$.

任给x一个增量Δx，相应地$\mu = \underset{\sim}{A}(x)$也有一个增量

$$\Delta\mu = \underset{\sim}{A}(x + \Delta x) - \underset{\sim}{A}(x)$$

假定：(1) $\Delta\mu$与Δx成正比；

(2) 对同样大的Δx，若x越大，则$\Delta\mu$也应越大；

(3) 因为μ不超过1，所以μ越接近1，$\Delta\mu$应越小.

于是有

$$\Delta\mu = k \cdot \Delta x \cdot x(1 - \mu)$$

其中k为比例常数.

将上式两边同除以Δx，则有

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} = kx(1 - \mu)$$

再令 $\Delta x \to 0$，便可得如下微分方程

$$\frac{d\mu}{dx} = kx(1 - \mu)$$

从而有
$$\frac{d\mu}{1 - \mu} = kx\mathrm{d}x$$

两边积分
$$\int \frac{d\mu}{1 - \mu} = \int kx\mathrm{d}x$$

得
$$\mu(x) = 1 - ce^{-\frac{kx^2}{2}}$$

这里 c 是积分常数，适当选择 k 和 c，则可完全确定 $\mu(x)$.

6.5 因素加权综合法

在实际问题中有时会遇到这样的模糊集，它有若干个因素相互作用而成，而每个因素又可以用模糊集来表示，此时的论域可表示为 n 个因素集的 Descartes 乘积，即

$$U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$$

设 $\underset{\sim}{A}_i \in \mathscr{F}(U_i)(i = 1,2,\cdots,n)$，$\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，$\underset{\sim}{A}$ 由 $\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n$ 复合而成. 复合方式可根据实际情况采用如下复合方式之一.

6.5.1 加权平均型

若 $\underset{\sim}{A}(u)$ 是由 $\underset{\sim}{A}_1(u_1),\underset{\sim}{A}_2(u_2),\cdots,\underset{\sim}{A}_n(u_n)$ 累加成的，则可令

$$\underset{\sim}{A}(u) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \underset{\sim}{A}_i(u_i)$$

其中 $u = (u_1,u_2,\cdots,u_n) \in U$，$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$ 是权重向量，且满足 $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$，$\delta_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 反映了第 i 个因素的重要程度.

例如，用模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 表示学生集合上的“优秀生”、将“优秀生”分成思想好、学习好、身体好、团结好、纪律好诸因素，

学生属于“优秀生”的隶属度 $\underset{\sim}{A}(u)$就等于 u 属于5个因素的隶属度 $\underset{\sim}{A}_i(u_i)$的加权平均，即

$$\underset{\sim}{A}(u) = \sum_{i=1}^{5} \delta_i \underset{\sim}{A}_i(u_i)$$

6.5.2 乘积平均型

若 $\underset{\sim}{A}(u)$随每个$(A_i(u_i))^{\alpha_i}$按比例变化，每个 $\underset{\sim}{A}_i(u_i)$对 $\underset{\sim}{A}(u)$都是必要的，且当任意一个 $\underset{\sim}{A}_i(u_i)$为零时，$\underset{\sim}{A}(u)$都为零.则可令

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{A}(u) &= b\prod_{i=1}^{n}(A_i(u_i))^{\alpha_i} \\ &= b(\underset{\sim}{A}_1(u_1))^{\alpha_1}\cdots(\underset{\sim}{A}_n(u_n))^{\alpha_n}\end{aligned}$$

其中 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in U, (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是权重向量，$b$ 是一适当选取的常数，以保证 $\underset{\sim}{A}(u) \in [0,1]$.

6.5.3 混合型

如果决定 $\underset{\sim}{A}(u)$ 的 $\underset{\sim}{A}_i(u_i)$ 可分成两部分，一部分是累加因素，一部分是乘积因素，则可令

$$\underset{\sim}{A}(u) = b\prod_{i=1}^{m-1}(\underset{\sim}{A}_i(u_i))^{\alpha_i} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} \delta_j \underset{\sim}{A}_{m+j}(u_{m+j})\right)^{\alpha_m}$$

其中 $u \in U$, $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$, $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k)$ 为两权重向量，且 $m + k = n + 1$，b 为正实数，权重 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$、$(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k)$ 可通过专家调查获取，也可通过试验取点，得到形如

$$(\underset{\sim}{A}(u_1), \cdots, \underset{\sim}{A}_n(u_n), \underset{\sim}{A}(u))$$

的若干组值，再用线性回归方法求出待定权重.

例6-4 在投资项目评价时，值定一个项目的“社会经济效

益”由利税水平、创汇水平、就业水平、生态效益和在整个经济系统中的制约作用（即指该项目在整个经济系统中是否决定和影响其他企业的发展，该项目是否为拳头产品项目等等）等五个因素构成，这五个因素均是模糊集，依次记为 $\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{A}_3, \underset{\sim}{A}_4, \underset{\sim}{A}_5$. 如选取 $\underset{\sim}{A}_4$ 和 $\underset{\sim}{A}_5$ 为关键因素，则可将表示“社会经济效益”的模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 表示为：对于项目 x，

$$\underset{\sim}{A}(x) = (\underset{\sim}{A}_4(x_4))^{\alpha_1}(\underset{\sim}{A}_5(x_5))^{\alpha_2}\left(\sum_{i=1}^{3}\delta_i \underset{\sim}{A}_i(x_i)\right)^{\alpha_3}$$

其中 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 和 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ 为二组权重.

一般地说，由 $\underset{\sim}{A}_1$, $\underset{\sim}{A}_2$, $\cdots$, $\underset{\sim}{A}_n$ 确定 $\underset{\sim}{A}$ 的过程，实质上是给定映射 f: $[0, 1]^n \to [0, 1]$，使对 $\forall u \in U$，有

$$\underset{\sim}{A}(u) = f(\underset{\sim}{A}_1(u_1), \underset{\sim}{A}_2(u_2), \cdots, \underset{\sim}{A}_n(u_n))$$

当然 f 的形式不一定限于以上所论，可灵活选取.

习 题 6

1. 设 $\underset{\sim}{A}$ 表示“货币流通量正常值”，它是实数集 X 上的模糊集，经过 100 次独立抽样，得区间样本值如下：

15 次：[15.5, 19.5]；20 次：[14.0, 20.0]；35 次：[16.0, 21.0]；
18 次：[17.5, 20.5]；12 次：[18.0, 21.5].

由这次抽样结果，分别估计 $\underset{\sim}{A}(15.5)$，$\underset{\sim}{A}(21.0)$.

2. 在一个荧光屏上，用一光点的上下运动快慢来代表 15 种不同的运动速率，记 $V = \{1,2,\cdots,15\}$，主试者随机地给出 15 种速率让被试者按“快”、“中”、“慢”进行判断分类，每种速率共给出 320 次，判断结果如下表：

概念	速率														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
快	0	0	0	0	0	0	0	0	0	84	218	261	320	320	320
中	0	0	0	15	190	319	320	320	320	236	102	59	0	0	0
慢	320	320	320	305	130	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

（1）试用频率作为隶属度，确定模糊概念“快”、“中”、“慢”在 V 中所表现的模糊集；

（2）画出上述变量的离散型分布密度函数图，作为它们在 V 上的隶属函数图；

（3）将图中离散点用折线连接起来，作为区间 $V' = [0, 15]$ 上三个模糊集的隶属函数曲线.

3. 以时间为论域，取 $U = [0,24]$（单位:h），分别给出模糊集 $\underset{\sim}{A}$ = “早上”、$\underset{\sim}{B}$ = “中午”、$\underset{\sim}{C}$ = “晚上”的隶属函数.

4. 规定：识字 500 以下者为文盲，识字 500 ~ 1000 者为半文盲，识字 1000 以上者为非文盲. 取论域 $U = R$（实数集），试建立模糊集 $\underset{\sim}{A}$ = “文盲”的隶属函数.

第 7 章 模糊聚类分析

模糊聚类分析是一类应用很广泛的数学方法. 就其理论上讲大致可分为三种, 一是基于模糊等价关系的传递闭包法, 二是基于模糊相似关系的直接聚类法, 三是基于模糊 c-划分的模糊聚类法. 本章将分别介绍这三种方法及其应用.

7.1 模糊聚类分析及其步骤

7.1.1 模糊聚类分析

在生产、科学实验及日常生活中, 常要求我们把所接触、研究的对象 (论域), 按它们的性质、用途等分成几类. 例如, 在地质勘探中, 我们要按照矿石标本的颜色、比重和化学成分等特征, 将矿石标本分成不同的类别; 在研究工具钢的性能时, 要根据钢材所含碳化物的颗粒大小、多少及分布状况进行分级; 在日常生活中, 人们按照出售商品的不同, 把商店分成若干类型, 如食品店、服装店、土产杂货店等. 数学上, 把按一定要求和规律, 对事物进行分类的方法叫聚类分析, 它属数理统计多元分析的一个分支, 是对清晰事物进行分类的一种方法.

然而, 现实生活中, 事物之间的界限往往不一定很清晰, 很多分类问题, 都多伴随着模糊性. 就拿天气来说, 晴、阴、雨天之间就没有绝对的界限, 有时会 "东边日出西边雨, 道是无晴却有晴". 对于这一类问题, 普通的聚类分析是无能为力的. 而用模糊数学的语言和方法来描述和解决就成为自然和方便的了, 这就产生了模糊聚类分析.

7.1.2 模糊聚类分析的步骤

应用模糊聚类分析对事物进行分类，一般按如下四个步骤进行.

7.1.2.1 选择统计指标

根据实际问题，选择那些具有明确的意义，有较强的分辨力和代表性的特征，作为分类事物的统计指标. 统计指标选择得如何，对分类效果有直接的影响.

7.1.2.2 数据标准化（正规化）

把代表事物各特征的统计指标的数据进行处理，使之便于分析和比较. 数据标准化可这样进行：令

$$x' = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}$$

其中 x 为原始数据，$\overline{x}$ 为原始数据的平均值，σ 为原始数据的标准差.

7.1.2.3 标定

所谓标定，就是根据实际情况，按一个准则或某一种方法，给论域 U 中的元素两两之间都赋以区间[0,1]内的一个数，叫做相似系数. 它的大小表征两个元素彼此接近或相似的程度.

设 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 为待分类事物的全体，u_i 由一组数据 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}$ 来表征，用 r_{ij} 来表示元素 u_i 与 u_j 的相似系数，$0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$（$i$、$j=1, 2, \cdots, n$）；$r_{ij}=0$ 表示 u_i 与 u_j 截然不同，毫无相似之处；$r_{ij}=1$ 表示它们完全相似或等同；当 $i=j$ 时，r_{ii} 就是 u_i 自己与自己的相似程度，恒取为1. r_{ij} 可根据实际情况，选下列方法之一，来加以确定.

（1）数量积法

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \dfrac{1}{M}\sum\limits_{k=1}^{m} x_{ik}x_{jk}, & i \neq j \end{cases}$$

其中

$$M = \max_{i \neq j} \left(\sum_{k=1}^{m} x_{ik} x_{jk} \right)$$

显然$|r_{ij}| \in [0, 1]$. 如果r_{ij}中出现负值，可采用下面方法将全体r_{ij}进行重新调整.

方法1　令　$$r'_{ij} = \frac{r_{ij} + 1}{2}$$

则$r'_{ij} \in [0,1]$.

方法2　令　$$r'_{ij} = \frac{r_{ij} - m}{M' - m} \qquad (i \neq j)$$

其中　$m = \min_{i \neq j} r_{ij}$, $M' = \max_{i \neq j} r_{ij}$，于是$r'_{ij} \in [0, 1]$.

(2) 夹角余弦法

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} x_{ik} x_{jk}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_{ik}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_{jk}^2}}$$

如果r_{ij}中出现负值，也可采用上面方法调整.

(3) 相关系数法

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} - \overline{x}_i)(x_{ik} - \overline{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} - \overline{x}_i)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_{jk} - \overline{x}_j)^2}}$$

其中$\overline{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_{ik}$, $\overline{x}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_{jk}$.

(4) 最大最小法

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} \wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} \vee x_{jk})}$$

(5) 算术平均最小法

$$r_{ij}=\frac{2\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}+x_{jk})}$$

（6）几何平均最小法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{x_{ik}\cdot x_{jk}}}\qquad(x_{ik}x_{jk}\geqslant 0)$$

（7）绝对值指数法

$$r_{ij}=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|\right\}$$

（8）指数相似系数法

$$r_{ij}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\exp\left\{-\left(\frac{x_{ik}-x_{jk}}{S_k}\right)^2\right\}$$

其中 S_k 适当选择.

（9）绝对值倒数法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ \dfrac{M}{\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|}, & i\neq j\end{cases}$$

其中 M 适当选取，使 r_{ij} 在 $[0,1]$ 中且分散开.

（10）绝对值减数法

$$r_{ij}=1-c\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|$$

其中 c 适当选取，使 r_{ij} 在 $[0,1]$ 中且分散开.

（11）非参数法

令

$$x'_{ik}=x_{ik}-\bar{x}_i,\quad x'_{jk}=x_{jk}-\bar{x}_j$$

$$n^+=\{x'_{i1}x'_{j1},x'_{i2}x'_{j2},\cdots,x'_{im}x'_{jm}\}\text{ 中正数个数}$$

$$n^- = \{x'_{i1}x'_{j1}, x'_{i2}x'_{j2}, \cdots, x'_{im}x'_{jm}\}\ 中负数个数$$

$$r_{ij} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n^+ - n^-}{n^+ + n^-}\right)$$

（12）贴近度法

如果特征 x_{ik}、$x_{jk} \in [0,1]$（$k = 1,2,\cdots,m$），则 u_i，u_j 可看作模糊向量 $u_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})$，$u_j = (x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm})$，以它们的贴近度 $D(u_i, u_j)$ 为其相似程度.

①格贴近度

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ D(u_i, u_j), & i \neq j \end{cases}$$

其中 $D(u_i, u_j) = \left(\bigvee_{k=1}^{m}(x_{ik} \wedge x_{jk})\right) \wedge \left(1 - \bigwedge_{k=1}^{m}(x_{ik} \vee x_{jk})\right)$

②距离贴近度

$$r_{ij} = 1 - c(d(u_i, u_j))^{\alpha}$$

其中 c，α 为适当选择参数值，$d(u_i, u_j)$ 为模糊集各种距离：

a. Minkowski 距离

$$d(u_i, u_j) = \left(\sum_{k=1}^{m} |x_{ik} - x_{jk}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $p = 1$ 时为 Hamming 距离

$$d(u_i, u_j) = \sum_{k=1}^{m} |x_{ik} - x_{jk}|$$

对应 Hamming 距离的贴近度（取 $\alpha = 1$）与绝对值减数法一致；当 $p = 2$ 时为 Enclid 距离

$$d(u_i, u_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik} - x_{jk})^2}$$

b. 马氏距离

令

$$v_{ij} = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)$$

若矩阵 $V=(v_{ij})_{m\times m}$ 的逆矩阵存在，则马氏距离定义为

$$(d(u_i,u_j))^2=(u_i-u_j)V^{-1}(u_i-u_j)^T$$

$$=(x_{i1}-x_{j1},\cdots,x_{im}-x_{jm})V^{-1}\begin{pmatrix} x_{i1}-x_{j1} \\ \cdots\cdots \\ x_{im}-x_{jm} \end{pmatrix}$$

c. Lance 距离

$$d(u_i,u_j)=\sum_{k=1}^{m}\frac{|x_{ik}-x_{jk}|}{|x_{ik}+x_{jk}|}$$

d. Chebyshev 距离

$$d(u_i,u_j)=\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|$$

③算术平均最小贴近度

$$r_{ij}=D(u_i,u_j)=\frac{2\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}x_{ik}+\sum_{k=1}^{m}x_{jk}}$$

（13）主观评定法

请有实际经验者直接对 u_i，u_j 的相似程度评分，作为 r_{ij} 的值.

以上各种方法究竟选择哪一种，需要根据问题的实际特点进行选择.

通过标定求出相似系数后，便可得到以 r_{ij} 为元素的模糊相似矩阵 $R=(r_{ij})$.

7.1.2.4 聚类

选择一种合适的聚类方法（下一节开始介绍），便可得到分类结果.

7.2 基于模糊等价关系的传递闭包法

7.2.1 传递闭包法

根据标定所得模糊矩阵 R，求出其传递闭包 $t(R)$，$\overline{R}=t(R)$

为模糊等价矩阵，然后依3.4节介绍的方法，令 λ 从1降到0，便可按照需要对 U 进行分类. 这样的聚类方法，称为传递闭包法，下面看一个例子.

例 7-1 环境单元分类

设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 为五个环境单元的集合，每个环境单元有空气、水分、土壤、作物四个要素，环境单元的污染状况由污染物在四个要素中含量的超限度来描述，若其污染数据为 $u_1 = (5,5,3,2)$，$u_2 = (2,3,4,5)$，$u_3 = (5,5,2,3)$，$u_4 = (1,5,3,1)$，$u_5 = (2,4,5,1)$，试对 U 进行分类.

解 先按绝对值减数法进行标定. 若取 $c = 0.1$，则

$$r_{ij} = 1 - 0.1\sum_{k=1}^{4} | x_{ik} - x_{jk} |$$

于是得模糊相似矩阵

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

再用逐次平方法计算 R 的传递闭包 $t(R) = \bar{R}$. 因为

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 1 \end{pmatrix} \supseteq R$$

$$R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix} \supseteq R^2$$

$$R^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix} = R^4$$

所以传递闭包 $\overline{R} = R^4$,然后依次取 λ 截矩阵 $\overline{R}_\lambda$,并按 $\overline{R}_\lambda$ 将 U 分成等价类.若取 $\lambda = 1$,便将 U 分为五类,即 $\{u_1\},\{u_2\},\{u_3\},\{u_4\},\{u_5\}$;若取 $\lambda = 0.8$,则将 U 分为四类,即 $\{u_1,u_3\},\{u_2\},\{u_4\},\{u_5\}$;取 $\lambda = 0.6$,则将 U 分为三类,即 $\{u_1,u_3\},\{u_2\},\{u_4,u_5\}$;取 $\lambda = 0.5$,则将 U 分为两类,即 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\},\{u_2\}$;取 $\lambda = 0.4$,将 U 全归为一类,即 $\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$. 详细过程见3.4节,其聚类图见图3-3.

7.2.2 最佳阈值 λ 的确定

聚类图给出各 λ 值对应的分类,形成一种动态聚类,便于全面了解元素聚类,然后根据实际需要选择其阈值 $\boldsymbol{\lambda}$,便可确定元素的一种分类,至于如何选择阈值 λ,使分类更加合理,除了凭经验外,还可用 F-统计量来选取.

F-统计量的意义如下:

设 $U = \{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 为待分类事物的全体,$u_j = (x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jm})$,$x_{jk}$ 为描述元素 u_j 第 k 个特征的数据($k = 1,2,\cdots,m$). 又设 c 为对应于 λ 值的类数,n_i 为第 i 类元素的个数,第 i 类元素记为 $u_1^i,u_2^i,\cdots,u_{n_i}^i$,记

$$\overline{x}_k^i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{jk}(k = 1,2,\cdots,m)$$

为第 i 类元素的第 k 个特征的平均值,而称 $\overline{u}^i = (\overline{x}_1^i,\overline{x}_2^i,\cdots,\overline{x}_m^i)$ 为第 i 类的聚类中心向量;$\overline{u} = (\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_m)$ 为全体元素的中心向量,而

$$\overline{x}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{jk}(k = 1,2,\cdots,m)$$

于是，称

$$F=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{c}\frac{n_i\|\bar{u}^i-\bar{u}\|^2}{(c-1)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\|u_j^i-\bar{u}^i\|^2}{(n-c)}} \tag{7.1}$$

为 F-统计量，其中

$$\|\bar{u}^i-\bar{u}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(\bar{x}_k^i-\bar{x}_k)^2}$$

为 $\bar{u}^i$ 与 $\bar{u}$ 的距离，$\|u_j^i-\bar{u}^i\|$ 为第 i 类中元素 u_j^i 与中心 $\bar{u}^i$ 的距离. 可见 F- 统计量的分子表征类与类间的距离，分母表征类内元素间距离. 因此 F 值越大，说明分类越合理，与此分类相对应的 F- 统计量最大的阈值 λ 为最佳值.

例 7-2 气象预报中最佳阈值的选取（参见文献 [13]）：

在探讨暴雨预报方法时，以江浦县天气周期的划分为基本分类，经筛选确定七个因子：120℃E 副热带高压脊线的纬度，脊线进退，黄山风向风速及该县气象站的气压、气温、水汽压、水汽压与气温的差，用相似系数 r_{ij} 来标定元素间的亲疏程度，得到一个 13 阶的相似矩阵 R（略），用逐次平方法求得 $\bar{R}=R^8$，然后用传递闭包法便可进行分类.

设 p 为分类的方案数，由于所有样本各自成类或全部并入一类没有实际意义，因此实际上有 $p-2$ 个分类方案可供选择. 而这里 $n=13$，$p=12$，$p-2=10$. 又各元素的预报量 y 值如表 7-1 所列.

由式（7.1），便可计算出不同的 λ 值所对应的 F 值，结果见表 7-2.

表 7-1 暴雨预报量

样本号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y(mm)	70.9	177.1	50.3	89.7	72.8	107.7	80.3	82.5	56.6	54.2	177.6	55.0	148.7

表 7-2 分类及 F 值

分类数	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12
λ	0.68	0.70	0.73	0.74	0.75	0.77	0.79	0.81	0.82	0.85
F	0.0892	1.2964	1.2814	4.9053	4.6365	3.3130	2.4619	1.6424	1.0365	0.4929

例如当 $\lambda = 0.68$ 时，划分为{6}，{1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,13}，分类数 $c = 2, n_1 = 1, n_2 = 12$，从而

$$F = \frac{(107.7 - 94.1)^2 + 12(93.0 - 94.1)^2}{[(70.9 - 93)^2 + (177.1 - 93)^2 + \cdots + (148.7 - 93)^2]/(13 - 2)}$$

$$= 0.0892$$

由表 7-2 可看出，当 $\lambda = 0.74$ 时，F 的值最大. 因此 $\lambda = 0.74$ 为最佳阈值，相应地得到如下划分：{2, 4, 11, 13}，{5, 10}，{7, 8}，{1, 3}，{9, 12}，{6}. 这一划分的合理性从天气学的角度得到了证实.

7.3 基于模糊相似关系的直接聚类法

用传递闭包法进行分类，需要先建立 U 上的模糊等价矩阵，当矩阵阶数较高时，求等价矩阵的计算量很大，这给解决实际问题带来很多困难. 下面介绍的直接聚类法，其计算量要小得多.

所谓直接聚类法是指直接利用相似矩阵 R 进行聚类的方法. 其聚类的原则是：u_i 与 u_j 在 λ 水平上同类当且仅当在 R 的图中，存在一条权重不低于 λ 的路联结 u_i 与 u_j，直接聚类法包括最大树法和编网法两种，它们分别为直接聚类法的图形化和表格化.

7.3.1 最大树法

最大树法的具体步骤如下：.

(1) 画出以被分类元素为结点，以相似矩阵 R 的元素 r_{ij} 为权重的一棵最大树；

(2) 取定 $\lambda \in [0, 1]$，砍断权重低于 λ 的枝，得到一个不连通图，各连通分支便构成了在 λ 水平上的分类.

以例 7-1 来说明最大树法.

已知 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，相似矩阵为

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0.1 & 1 & & & \\ 0.8 & 0.2 & 1 & & \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 1 & \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

由 3.4 节介绍的 Kruskal 法可得最大树（见图 7-1）.

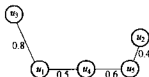


图 7-1　最大树

取 $\lambda = 1$，砍断权重低于 1 的枝，得五类 $\{u_1\}$，$\{u_2\}$，$\{u_3\}$，$\{u_4\}$，$\{u_5\}$；取 $\lambda = 0.8$，砍断权重低于 0.8 的枝，得四类 $\{u_1, u_3\}$，$\{u_2\}$，$\{u_4\}$，$\{u_5\}$；类似地，取 $\lambda = 0.6$ 得三类 $\{u_1, u_3\}$，$\{u_4, u_5\}$，$\{u_2\}$；取 $\lambda = 0.5$，得两类 $\{u_2\}$，$\{u_1, u_3, u_4, u_5\}$；取 $\lambda = 0.4$，归为一类 $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. 分类结果与用传递闭包法完全一致.

7.3.2　编网法

编网法的具体做法是：对给定的模糊相似矩阵 R，取定水平 $\lambda \in [0,1]$，作截矩阵 R_λ，在 R_λ 的主对角线上填入元素的符号，在对角线下方以结点号“*”代替 1，而“0”则略去不写，由结点向主对角线上引经线和纬线，称之为编网，通过经线和纬线能互相连接起来的元素，属于同类，从而实现了分类.

仍以例 7-1 来说明编网法.

取 $\lambda = 0.6$，得 λ 截矩阵

$$R_{0.6}=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

编网（见图7-2）.

由图7-2可得分类结果为 $\{u_1, u_3\}, \{u_2\}, \{u_4, u_5\}$，也与前面的分类相同.

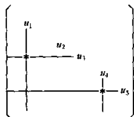


图7-2 编网

前面介绍的传递闭包法、最大树法以及编网法，尽管在形式上各不相同，但其聚类原则是一致的：u_i 与 u_j 在 λ 水平上归于一类当且仅当元素 u_i 与 u_j 具有等价关系$\underset{\sim}{R}$的程度不低于 λ. 因此，对于同一问题这些方法分类结果是相同的，我们在实际应用时可视情况灵活选取.

7.4 基于模糊 c-划分的模糊聚类法

7.4.1 c-划分

7.4.1.1 普通 c-划分

如果划分把普通集合分成 c 类，则此划分就叫普通 c-划分，即若设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，u_j 的特征可表为 $u_j=(x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jm})$，那么 U 的普通 c-划分是指 U 的 c 个子集 $\{A_i \mid i=1,2,\cdots,c\}$ $(2\leqslant c\leqslant n)$，满足

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{c}A_i=U$;

(2) $A_i\cap A_j=\varnothing \quad (i\neq j)$.

这样的分类结果可以用一个 $c\times n$ 矩阵（称为 c-划分矩阵）来表示.

$$
A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_c \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{c1} & a_{c2} & \cdots & a_{cn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ c \end{matrix}
$$

其中

$$
a_{ij}=\begin{cases} 1, & u_j \in A_i \quad (u_j \text{ 属于第 } i \text{ 类}) \\ 0, & u_j \bar{\in} A_i \quad (u_j \text{ 不属于第 } i \text{ 类}) \end{cases} \tag{7.2}
$$

且满足 (1) $\forall j,\ \sum_{i=1}^{c} a_{ij} = 1$(表示每个 u_j 必属于且仅属于一类)

(7.3)

(2) $\forall i, 0 < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < n$(表示每类 A_i 至少有一个元素)

(7.4)

反过来，任一满足条件 (7.2)，(7.3)，(7.4) 的矩阵对应着 U 的一个分类.

例如，设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，若分类结果为 $\{u_1\}, \{u_2, u_3\}, \{u_4\}$，则对应的分类矩阵为

$$
\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}
$$

若分类矩阵为

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

则对应着 U 的分类为 $\{u_1\}$，$\{u_2\}$，$\{u_3, u_4\}$.

记 $\mathscr{V}_{c\times n}$ 为 $c\times n$ 实矩阵的集合，且

$$M_c = \left\{A \mid A = (a_{ij}) \in \mathscr{V}_{c\times n}, a_{ij} \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{c} a_{ij} = 1, 0 < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < n\right\}$$

显然，对于给定的 U 及分类数 c，类的分法不是唯一的. M_c 包含了 U 的所有可能 c 类划分的结果，M_c 称为将 U 分成 c 类的分类空间. 这样的分类是通常的分类，称为硬分类.

7.4.1.2　模糊 c-划分

然而，在许多实际问题中，往往伴随着模糊性，难于断言一个元素一定属于某一类而不属于另一类，而是以某种程度属于这一类，而又以另一种程度属于另一类，即每一类都是 U 上的一个模糊子集，这样一来，分类所对应的矩阵自然是一个模糊矩阵，而此时的划分就称为模糊 c-划分.

定义 7-1　设 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，$u_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm}\}$，一个 $c\times n$ 模糊矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{c1} & a_{c2} & \cdots & a_{cn} \end{pmatrix}$$

若满足

(1) $\forall j$, $\sum_{i=1}^{c} a_{ij} = 1$（表示每个 u_j 属于 c 个模糊子集 A_i 的程度总和为 1）;

(2) $\forall i, 0 < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < n$（表示每类 A_i 不等于 $\varnothing$ 或 U）.

则 A 称为 U 的模糊 c-划分矩阵. 记

$$M_{fc} = \left\{A \mid A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{c\times n}, a_{ij} \in [0,1]\right.$$

$$\sum_{i=1}^{c} a_{ij} = 1, 0 < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < n\}$$

M_{fc}称为 U 的 c 类软分类空间.

显然 $M_c \subseteq M_{fc}$.

若将 M_c 和 M_{fc}定义中的条件

$$0 < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < n(\forall i)$$

放宽为

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \leqslant n(\forall i)$$

则这样的分类空间分别称为退化的硬分类空间和退化的软分类空间. 分别记为 M_{co}和 M_{fco}, 显然 $M_{co} \subseteq M_{fco}$.

从空间 M_c 或 M_{fc}中如何选取"最佳"划分呢? 对于硬分类的情况, 若试图将 n 个数据样本分为 c 类且每类不空, 则存在有 M 个可能的分类结果:

$$M = \frac{1}{c!}\left[\sum_{j=1}^{c} \binom{c}{j} (-1)^{c-j} j^{n}\right]$$

当 $n = 25$, $c = 10$ 时, 大约有 10^{18}种不同的分类结果.

对于模糊分类的情况, 则存在无限多个分类结果.

我们希望在众多可能的分类中寻求合理的分类结果, 为此, 要确立合理的聚类准则.

7.4.2 目标函数聚类法和硬 c-均值算法

在目标函数法中, 目标函数是对给定 c 的所有候选类进行度量, 最优的类就是使目标函数达到局部最小值的类. 对于硬分类情形, 通常所选取的目标函数是总体组内误差平方和, 其定义为

$$J(A,V) = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \| u_j - v_i \|^2$$

这里我们将每类 A_i 中元素各特征分别取平均值, 所得的聚

类中心向量记为 v_i，也称为 A_i 的聚类中心. 由于 A_i 类中元素个数 $n_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$，$A_i$ 类中元素向量和为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j$，因此聚类中心向量

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}$$

记

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{c1} & v_{c2} & \cdots & v_{cm} \end{pmatrix}$$

V 称为聚类中心矩阵.

若 $u_j \in A_i$，则 u_j 到聚类中心 v_i 的距离为

$$d_{ij} = \| u_j - v_i \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_{jk} - v_{ik})^2}$$

A_i 中全体元素到中心距离平方和为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(d_{ij})^2$$

而 V 中所有元素到其所在类中心距离平方和为

$$J(A,V) = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(d_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \| u_j - v_i \|^2$$

可见最理想的 c-划分显然是使 J（A，V）取极小的 A. 寻找使 J（A，V）最小的 A 并不容易，这是因为 M_c 的容量虽有限但非常大. 最常见的方法是下面的硬 c-均值算法.

硬 c-均值算法：

步骤 1　假设给出 n 个数据点 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，其中 $u_j = (x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm}) \in R^m$. 取定 c（$2 \leqslant c \leqslant n$），并初始化 $A^{(0)} \in M_c$.

步骤 2　当迭代次数为 l（$l = 0, 1, 2, \cdots$）时，计算聚类中心

向量

$$v_i^{(l)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)} u_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}}$$

其中 $(a_{ij}^{(l)}) = A^{(l)}$　$i = 1, 2, \cdots, c$.

步骤 3　用下式将 $A^{(l)}$ 更新为 $A^{(l+1)} = (a_{ij}^{(l+1)})$

$$a_{ij}^{(l+1)} = \begin{cases} 1 & \| u_j - v_i^{(l)} \| = \min\limits_{1 \le i \le c} (\| u_j - v_i^{(l)} \|) \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

步骤 4　比较 $A^{(l)}$ 和 $A^{(l+1)}$，若 $\| A^{(l+1)} - A^{(l)} \| < \varepsilon$.（$\varepsilon$ 是一个非常小的常数），则停止算法；

否则，令 $l = l + 1$，返回步骤 2.

硬 c-均值算法直观上看十分合理：猜想 c 的硬分类（步骤 1），寻找各分类的中心（步骤 2），重新分配类的隶属度以减少数据和当前中心的误差平方（步骤 3），当循环不再能显著地降低 $J(A, V)$ 时，停止算法（步骤 4）.

例如，假设 u 含有 R^2 中的 15 个点，如图 7-3 所示，这些点对称分布，看起来像一只蝴蝶，其中 u_1 到 u_7 构成左翅，u_9 到 u_{15} 构成右翅，u_8 将两翅连接.

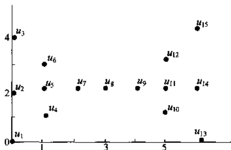


图 7-3　蝴蝶数据

当 $c=2$ 时，且

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{时，}$$

硬 c-均值算法终止于 $l=3$，且有

$$A^{(3)} = A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^{(3)}$ 说明了 u_1 到 u_7 可划分为一类 A_1，余下的 u_8 到 u_{15} 可划分为另一类 A_2. 需要注意的是，由于 u_8 必须属于 A_1 或 A_2，这使得 A_1 与 A_2 不能关于 u_8 对称. 所以这种非对称的分类不具有直观性. 解决这个问题的一个办法就是使用下面介绍的模糊 c-均值算法.

7.4.3 模糊 c-均值算法

类似于硬分类的情况，我们定义目标函数

$$J_m(A,V) = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^r \| u_j - v_i \|^2$$

其中 $r \geqslant 1$ 是一个加权指数.

模糊 c-均值算法的目标在于找到 $A = (a_{ij}) \in M_{fc}$ 和 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_c)$ $(v_i \in R^m)$，使得 $J_m(A, V)$ 最小.

下面，首先建立这个最小化问题的必要条件，然后根据此条件提出模糊 c-均值算法

定理 令 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，$u_j = (x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm}) \in R^m$ 为一给定数据集. 设定 $c \in \{2,3,\cdots,n-1\}$ 和 $r \in (1,\infty)$，假设对所有 $1 \leqslant k \leqslant n$. 和 $1 \leqslant i \leqslant c$ 有 $\| u_j - v_i \| \neq 0$.

则仅当 $a_{ij} = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{c}\left(\dfrac{\| u_j - v_i \|}{\| u_j - v_j \|}\right)^{\frac{2}{r-1}}}$，$\quad 1 \leqslant i \leqslant c,\ 1 \leqslant j \leqslant n \quad (7.5)$

和 $\quad v_i = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij})^r u_j}{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij})^r}$，$\quad 1 \leqslant i \leqslant c \quad (7.6)$

时，$A=(a_{ij})$ 和 $V=(v_1, v_2, \cdots, v_c)$ 才是 $J_m(A, V)$ 的局部最小值.

证明 先证式（7.5）成立.

假设 v_i 不变，则问题变为在约束条件 $\sum_{i=1}^{c} u_{ij}=1$ 下，$J_m(A,V)$ 关于 a_{ij} 的最小化问题. 引入拉格朗日乘积因于，本问题等价于求下面函数最小化问题.

$$L(A,\lambda) = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^r \| u_j - v_i \|^2 - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big(\sum_{i=1}^{c}a_{ij}-1\Big) \tag{7.7}$$

本问题的必要条件为

$$\frac{\partial L(A,\lambda)}{\partial a_{ij}} = [r(a_{ij})^{r-1}\| u_j - v_i \|^2 - \lambda_j] = 0 \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial L(A,\lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^{c} a_{ij} - 1 = 0 \tag{7.9}$$

由式（7.8）可得：

$$a_{ij} = \left(\frac{\lambda_j}{r\| u_j - v_i \|^2}\right)^{\frac{1}{r-1}} \tag{7.10}$$

将式（7.10）代入式（7.9）得

$$\left(\frac{\lambda_j}{r}\right)^{\frac{1}{r-1}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{c}\left(\frac{1}{\| u_j - v_i \|^2}\right)^{\frac{1}{r-1}}} \tag{7.11}$$

再将式（7.11）代入式（7.10）得所证式（7.5）成立，即

$$a_{ij} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{c}\left(\frac{\| u_j - v_i \|}{\| u_j - v_j \|}\right)^{\frac{2}{r-1}}} \quad 1 \leqslant i \leqslant c, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

为证明式（7.6）成立，假设 a_{ij}不变. 则问题变为无约束最小化问题. 其必要条件是

$$\frac{\partial J_m(A,V)}{\partial v_i} = -\sum_{j=1}^{n} 2(a_{ij})^r(u_j - v_i) = 0$$

于是
$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^r u_j}{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^r}, \quad 1 \leqslant i \leqslant c$$

即式（7.6）成立.

模糊 c-均值算法是建立在必要条件式（7.5）、（7.6）的基础上的. 模糊 c-均值算法步骤如下：

（1）给定数据集 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}, u_j = (x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm}) \in R^m$. 设定 $c \in \{2, 3, \cdots, n-1\}$ 和 $r \in (1, +\infty)$. 并初始化 $A^{(0)} \in M_{fc}$.

（2）当迭代次数为 l（$l=0, 1, 2, \cdots$）时，计算聚类中心向量

$$v_i^{(l)} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^{(l)})^r u_j}{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^{(l)})^r}, \quad 1 \leqslant i \leqslant c \tag{7.12}$$

（3）用下式将 $A^{(l)} = (a_{ij}^{(l)})$ 更新为

$$A^{(l+1)} = [a_{ij}^{(l+1)}]$$

$$a_{ij}^{(l+1)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{c}\left(\frac{\| u_j - v_i^{(l)} \|}{\| u_j - v_j^{(l)} \|}\right)^{\frac{2}{r-1}}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant c, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{7.13}$$

（4）若 $\| A^{(l+1)} - A^{(l)} \| < \varepsilon$（$\varepsilon$ 是一个非常小的常数）则停止算法；否则令 $l = l+1$，返回步骤 2.

此算法也称为模糊 ISODATA 方法.

应当注意的是，本方法要求 $v_i \neq u_j$，因此取初始分类 $A^{(0)}$ 时，遇到只有一个样本的类，要在聚类前先排除，待聚类后再加上该类，而参数 r 一般常取 $r=2$.

7.4.4 模糊划分清晰化

在实际问题中，最后的分类结果都要求是明确的，因此，在使用模糊 c-划分分类后，都必须将模糊划分清晰化，可用下述方法进行.

方法 1 对 $\forall u_j \in U$，若

$$\| u_j - v_i \| = \min_{1 \leq k \leq c} \| u_j - v_k \|$$

则将 u_j 归入 A_i 类.

方法 2 对 $\forall u_j \in U$，若

$$a_{ij} = \max_{1 \leq k \leq c} a_{kj}$$

则将 u_j 归入 A_i 类.

下面将此算法应用于蝴蝶数据.

令 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_{15}\}$ 为图 7-3 所示蝴蝶数据，取 $c = 2$，$r = 1.25$，$\varepsilon = 0.01$，且

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.854 & 0.146 & 0.854 & 0.854 & \cdots\cdots & 0.854 \\ 0.146 & 0.854 & 0.146 & 0.146 & \cdots\cdots & 0.146 \end{pmatrix}_{2\times 15}$$

由模糊 c-均值算法终止于 $l = 5$，其 $a_{ij}^{(5)}$ 如图 7-4 所示.

可以看到，左翅与右翅的数据得到了很好的划分. 其中 u_8 几乎以同一程度属于这两类，这很具有直观吸引力.

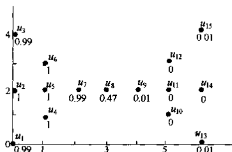


图 7-4 采用模糊 c-均值算法得到的蝴蝶数据点的隶属度值

由此可知，模糊 c-均值聚类的优点是不但能明确指出每一类的中心，同时还能指明类的外围，不同类之间的衔接和离散的情况.

在具体应用时，可把此方法与基于模糊等价关系的聚类分析方法混合使用，先在后者的基础上，选择一最佳分类，以对应的分类作为初始分类矩阵的参考值. 然后再用 ISODATA 方法加以修正.

例 7-3 模糊 ISODATA 聚类算法的应用(参见文献[14])：

某地有一批超基性岩的样品，经光谱分析得到与矿物有关的某些元素（指标），其数据见表 7-3，问这些样品应分为几类.

表 7-3 超基性岩各元素含量数据

样品编号	岩性特征	元素含量					
		Ni	Co	Cu	Cr	S	As
Ⅰ	蛇纹岩	1903	273	100	1178	8163	4
Ⅱ	A 组矿化蛇纹岩	2328	79	6	3175	586	14
Ⅲ	无矿化蛇纹岩	744	26	1	841	425	3
Ⅳ	矿化滑镁岩	2782	273	150	2400	8234	37
Ⅴ	B 组矿化滑镁岩	1775	94	13	3140	54	1
Ⅵ	无矿化滑镁岩	104	44	6	2093	104	4

表中所列元素在岩石中，一般遵从对数正态分布. 因此，要将原始数据变换为对数值.

先用“基于模糊等价关系的传递闭包法”对样品进行初步分类，在 $0.367 < \lambda < 0.4$ 的水平上，样品被分为两类{Ⅱ,Ⅲ,Ⅴ,Ⅵ},{Ⅰ,Ⅳ}. 参考这个分类的结果取初值分类矩阵为

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.9 & 0.1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 & 0.1 & 0.9 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

其中行表示分类，列表示样品.

然后以 $A^{(0)}$ 作为初始分类，在 $c=2$ 时，取 $r=2, \varepsilon=0.001$，$\|\cdot\|$ 为 Euclid 范数. 反复利用计算公式(7.12)和(7.13)，不断

修改初始分类,最后算出在 $0.367 < \lambda < 0.42$ 上的最优分类矩阵

$$
A = \begin{pmatrix} 0.038 & 0.858 & 0.937 & 0.475 & 0.928 & 0.983 \\ 0.962 & 0.142 & 0.063 & 0.525 & 0.072 & 0.017 \end{pmatrix}
$$

聚类中心

$$
V = \begin{pmatrix} 3.255 & 1.862 & 0.757 & 3.307 & 2.364 & 0.607 \\ 5.581 & 2.423 & 2.162 & 3.149 & 3.880 & 0.825 \end{pmatrix}
$$

根据最优分类矩阵及最大隶属度原则，最终分类为 {Ⅱ，Ⅲ，Ⅴ，Ⅵ}，{Ⅰ，Ⅳ}. 此结果虽与初始分类相同，但它为我们提供了较多的信息，指明第四号基岩是介于第一类与第二类之间，略接近于第二类，这与实际资料的结果相符合.

例 7-4 应用模糊聚类分析对地下水位动态分类(参见文献[15]).

为研究西安市某河水对地下水源的影响，1989 年 9 月至 1990 年 12 月对该河流附近的 15 个观察点进行了水位测试，经统计得到240 个数据，最后整理为 180 个数据（见表 7-4). 问这 15 个观测点应分为几类.

表 7-4 西安市部分地区地下水位数据

69.05	69.05	69.11	69.17	69.30	69.29	69.32	68.98	69.22	69.33	69.34	69.29
71.47	71.30	71.32	71.28	71.42	71.44	71.43	71.11	71.61	71.75	71.38	71.92
72.63	72.59	72.56	72.38	72.55	72.38	72.41	72.11	72.58	72.63	72.64	72.62
71.10	71.56	71.63	71.34	71.58	71.65	71.57	71.30	71.60	71.70	71.79	71.69
72.24	72.33	72.27	72.24	72.31	72.32	72.49	72.32	72.46	72.54	72.55	72.47
72.54	72.45	72.50	72.52	72.52	72.49	72.50	72.23	72.46	72.62	72.62	72.62
73.43	73.43	73.42	73.25	73.30	73.33	73.29	73.29	73.33	73.35	73.36	73.40
67.89	68.01	68.01	64.88	67.90	67.75	67.56	67.33	67.74	67.76	67.76	67.68
66.20	66.24	66.26	66.21	66.28	66.37	66.46	66.15	66.33	66.40	66.38	66.31
66.23	66.27	66.30	66.28	66.41	66.40	66.58	66.19	66.48	66.51	66.47	66.35
71.24	71.44	71.44	71.24	71.33	71.20	71.18	70.91	71.03	71.25	71.24	71.13
69.02	68.95	68.96	69.09	69.68	69.89	69.86	69.73	69.58	69.30	69.27	69.18
68.87	68.94	69.21	69.37	69.68	69.35	69.62	69.67	69.52	69.42	69.30	69.11
68.87	68.99	69.32	69.47	69.64	69.37	69.61	69.47	69.70	69.46	69.25	68.97
72.34	72.41	72.79	72.94	73.17	72.52	73.08	72.88	73.21	72.94	72.68	72.40

表7-4中每一行的数据为同一观测点的水位变化，每一列为各观测点在同一时间上的水位数据.

尽管影响地下水位动态的因素是错综复杂的，但最终总是表现在地下水位随时间的变化这一自然过程上，因此可将待分类的各观测点水位在同一时间序列上的值作为分类信息.

用 $u_1, u_2, \cdots, u_{15}$ 分别表示15个观察点，组成论域 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_{15}\}$，而把各观测点的水位数据分别当作各观测点水位变化的特征，即 $u_j = (x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{j12})$.

先用绝对值减数法标定，得相似矩阵 $R = (a_{ij})_{15\times15}$，并求其传递闭包 $t(R)$；然后用传递闭包法初步硬分类，且用 F-统计量确定最佳分类数 c 及相应的分类，去掉单元素类，置初始分类矩阵

$$A^{(0)} = (a_{ij}^{(0)})_{q\times n}$$

其中

$$a_{ij}^{(0)} = \frac{1 - b\sum_{k=1}^{12}\left|x_{jk} - \bar{x}_k^i\right|}{q - b\sum_{k=1}^{12}\left|x_{jk} - \bar{x}_k^i\right|}$$

$b \in (0,1)$ 为一适当常数，$q = c - p$（p 为单元素类的个数）；最后应用模糊ISODATA算法进一步软分类，并进行模糊划分清晰化，便可得到最终分类：$\{u_3, u_5, u_6, u_7, u_{15}\}$，$\{u_2, u_4, u_{11}\}$，$\{u_1, u_{12}, u_{13}, u_{14}\}$，$\{u_9, u_{10}\}$，$\{u_8\}$. 其合理性，由实际情况得到了证实，另外上述全部过程均可由计算机来完成.

值得指出的是，初始值 $A^{(0)}$ 的选择影响收敛快慢和最终分类的效果，另外类数 c 及参数 r 的改变对效果也有较大的影响，一般的，当 r 减小趋近1时，最终分类有较小的模糊性，当 $r > 2$ 且逐渐增大时，最终分类的模糊性增大. 因此采取折衷方案取 $r = 2$ 较适宜.

习 题 7

1. 已知 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U\times U)$，$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，

$$R=\begin{pmatrix}1&0.4&0.2&0.8\\0.4&1&0.7&0.3\\0.2&0.7&1&0.5\\0.8&0.3&0.5&1\end{pmatrix}$$

求 $t(R)$，并作聚类图.

2. 根据某地区 1972～1978 年作物赤霉病的有关历史资料，可得模糊相似矩阵如下（对称部分略）.

$$R=\begin{pmatrix}1&0.11&0.69&0.35&0.39&0.45&0.79\\&1&0.15&0.81&0.66&0.52&0.01\\&&1&0.23&0.52&0.35&0.79\\&&&1&0.38&0.65&0.27\\&&&&1&0.44&0.36\\&&&&&1&0.35\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}72\\73\\74\\75\\76\\77\\78\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}72&73&74&75&76&77&78\end{matrix}$$

试用直接聚类方法按病害程度对此 7 年进行分类（取 $\lambda=0.66$）.

3. 某地历史上虫害情况分为 Ⅰ（轻），Ⅱ（中），Ⅲ（重）三类，今年的测报资料为 N，其相似矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}1&&&\\0.39&1&&\\0.16&0.55&1&\\0.59&0.41&0.26&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\\N\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\text{I}&\text{II}&\text{III}&N\end{matrix}$$

问今年虫害程度如何（取 $\lambda=0.59$）.

4. 设有四种产品，给定它们的指标如下：

$u_1=(37,38,12,16,13,12)$，$u_2=(69,73,74,22,64,17)$

$u_3=(73,86,49,27,68,39)$，$u_4=(57,58,64,84,63,28)$

试用最大最小法建立相似矩阵，并用传递闭包法，最大树法及编网法进行模糊分类.

5. 设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$，其中

$$x_1 = (7,9,2), x_2 = (3,5,5), x_3 = (7,7,5),$$

$$x_4 = (7.5,6,7.2), x_5 = (6,4,2), x_6 = (3,8,5).$$

试用算术平均最小法建立相似矩阵．并用最大树法进行模糊聚类（取 $\lambda = 0.87$）.

6. 将模糊 c-均值算法应用于蝴蝶数据，取 $c=3$，$r=1.25$，$\varepsilon=0.01$，

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.8 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

试确定分类结果.

第 8 章　模糊模式识别

模糊模式识别是模糊集合论应用的重要方面之一，它的主要任务是让机器能模拟人的思维方面，对带有模糊性的客观事物进行识别和归类.

本章首先介绍模式识别的概念，然后介绍识别方法，并举几个应用实例.

8.1　模式识别概述

模式一词是由英文 pattern 翻译而来的，按英文原意，它有典范、式样、图像和格局等意义，在不同的场合有不同的含义，例如，讨论图形时，图形的模式即指标准的图形；讨论产品时，产品的模式即指样品；在数学上则把没有适当数学描述的信息结构（或信号结构）称为模式.

所谓模式识别,简单地说,就是指把要辨别的对象,通过与已知的模式比较,确定它与哪个模式类同的过程. 模式识别的用途很广泛,在工业、农业、日常生活以及其它领域都经常用到它. 例如我们接到一位朋友的来信,看信的过程就是一个包含了模式识别的过程,为什么呢? 因为信中手写的汉字与标准印刷体的汉字是有区别的,同一汉字由不同的人写,其大小、形体是不同的,一波三折,千姿百态. 尽管如此,但这些汉字与它们的印刷体都有一定程度的类同,而与其他汉字则有较大的区别. 我们看信的过程,实质上是判断手写的汉字与哪一个标准汉字类同的过程,所以我们说此过程是一个模式识别的过程. 又如医生看病时,要根据病人的体温、血象以及有关的症状,判断病人患的是什么病,才能对症下药. 每一种典型的病都是一个模式,因此医生确诊病情的过程也是一个模式识别的过程. 再如,在确定工具钢的碳化物不均匀性的等级时,要与标准图谱

进行对照，也要用到模式识别.

模式识别系统通常由以下四部分组成：

（1）传感器部分：其作用是将模式转变为电信号；

（2）前处理部分：其作用是将传感器中的杂音消除，并且对信号进行“正规化”处理；

（3）特征提取部分：其作用是从信号中提取一些反映其特征的测量值供识别用；

（4）识别判断部分：其作用是根据提取的特征，按某种归类原则对输入的模式进行判决，并指出它归于哪一类.

上述各部分可用框图表示（见图 8-1），其中特征提取很重要，要提取那些本质的东西，而略去非本质的东西，例如让机器识别一个人是否“胖”？就要对人进行特征提取，人的特征很多，诸如民族、籍贯、年龄、身高、体重、性格等等，但对于“胖”来说，最重要的是身高和体重，其余的特征可略去. 识别判断部分是整个系统的“大脑”，是核心和关键，对最后的结果举足轻重，直接影响归类的效果. 我们主要讨论这部分的内容，即介绍识别的方法.

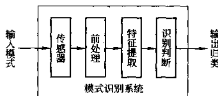


图 8-1　模式识别系统框图

模式识别通常采用统计方法，语言方法和模糊模式识别方法，在这里仅介绍模糊模式识别方法.

8.2　模糊模式识别

模糊模式识别方法有直接识别方法和间接识别方法两种.

8.2.1 模式识别的直接方法

8.2.1.1 最大隶属原则

对事物进行直接识别时，所依据的是最大隶属原则.

最大隶属原则 设 $\underset{\sim}{A}_i \in \mathscr{F}(U)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，$u_0 \in U$，若 $\exists j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，使得

$$\underset{\sim}{A}_j(u_0) = \max(\underset{\sim}{A}_1(u_0), \underset{\sim}{A}_2(u_0), \cdots, \underset{\sim}{A}_n(u_0))$$

则认为 u_0 相对隶属于 $\underset{\sim}{A}_j$，即元素 u_0 应归于模式 $\underset{\sim}{A}_j$.

这种直接由计算元素的从属函数值来判别具体对象归属的方法，就称为模糊模式识别的直接方法. 这种方法适合处理具有如下特点的问题：

（1）用作比较的模式是模糊的；

（2）被识别的对象本身是确定的.

直接识别方法是模拟人脑处理问题的思维过程而构造的一种数学模型，它的形式和归类方法虽然很简单，但确能有效地处理许多问题.

例 8-1 通货膨胀识别：

设论域 $X_+ = \{x \mid x \in X, x \geqslant 0\}$，它表示价格指数集. 对 $x \in X_+$，x 表示物价上涨 $x\%$. 通货膨胀状态可分成五个类型：通货稳定，轻度通货膨胀，中度通货膨胀，重度通货膨胀和恶性通货膨胀. 这五个类型依次用 X_+ 上的模糊集 $\underset{\sim}{A}_1$、$\underset{\sim}{A}_2$、$\underset{\sim}{A}_3$、$\underset{\sim}{A}_4$、$\underset{\sim}{A}_5$ 表示，根据统计资料分别取它的隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}_1(x) \triangleq \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ e^{\frac{-(x-5)^2}{3^2}}, & x > 5 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{A}_2(x) \triangleq e^{\frac{-(x-10)^2}{5^2}}$$

$$\underset{\sim}{A}_3(x) \triangleq e^{\frac{-(x-20)^2}{7^2}}$$

$$\underset{\sim}{A}_4(x) \triangleq e^{\frac{-(x-30)^2}{9^2}}$$

$$\underset{\sim}{A}_5(x) \triangleq \begin{cases} e^{\frac{-(x-50)^2}{15^2}}, & 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 1, & x > 50 \end{cases}$$

问 $x_1 = 8$，$x_2 = 40$，相对隶属于哪种类型？

解 $\underset{\sim}{A}_1(8) = 0.3679$, $\underset{\sim}{A}_2(8) = 0.8521$, $\underset{\sim}{A}_3(8) = 0.0529$,

$\underset{\sim}{A}_4(8) = 0.003$, $\underset{\sim}{A}_5(8) \triangleq 0$; $\underset{\sim}{A}_1(40) \triangleq 0$,

$\underset{\sim}{A}_2(40) \triangleq 0$, $\underset{\sim}{A}_3(40) = 0.0003$, $\underset{\sim}{A}_4(40) = 0.1299$,

$\underset{\sim}{A}_5(40) = 0.6412$.

其中记号 $\triangleq 0$ 表示数值非常非常小.

由最大隶属原则，$x_1 = 8$ 应相对隶属于 $\underset{\sim}{A}_2$. 即当物价上涨率8%，应视为轻度通货膨胀；$x_2 = 40$ 相对隶属于 $\underset{\sim}{A}_5$，即应视为恶性通货膨胀.

8.2.1.2　阈值原则

在直接识别时，还可依据阈值原则来识别.

阈值原则　设 $\underset{\sim}{A}_i \in \mathscr{F}(U)(i = 1,2,\cdots,n)$，对 $u_0 \in U$，取定水平 $\alpha \in [0,1]$，若存在 $i_1, i_2, \cdots, i_k$，使 $\underset{\sim}{A}_{i_j}(u_0) \geqslant \alpha (j = 1,2,\cdots,k)$，则判决为：$u_0$ 相对隶属于 $\underset{\sim}{A}_{i_1} \cap \underset{\sim}{A}_{i_2} \cap \cdots \cap \underset{\sim}{A}_{i_k}$. 若

$$\bigvee_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i(u_0) < \alpha$$

则判决为：不能识别，此时查找原因另作分析.

该方法也可对 u_0 与某一个标准模型 $\underset{\sim}{A}_k$ 进行识别. 如果 $\underset{\sim}{A}_k(u_0) \geqslant \alpha$，则认为 u_0 相对地隶属于 $\underset{\sim}{A}_k$，如果 $\underset{\sim}{A}_k(u_0) < \alpha$，则认为 u_0 相对地不隶属于 $\underset{\sim}{A}_k$.

在例8-1中，如取水平 $\alpha = 0.6$，按照阈值原则，$\underset{\sim}{A}_2(x_1) = 0.8521 > \alpha$，$x_1$ 相对隶属于 $\underset{\sim}{A}_2$，应视为轻度通货膨胀；$\underset{\sim}{A}_4(x_2) = 0.6412 > \alpha$，$x_2$ 相对隶属于 $\underset{\sim}{A}_4$，应视为恶性通货膨胀.

8.2.2　模式识别的间接方法

在上面介绍的直接识别方法中，所要识别的对象是单个情

况，但在现实生活中，有时要识别的对象并不是单个确定的元素，而是论域上的子集或模糊集. 这时，直接识别方法便失去效用，为此，下面介绍模式识别的间接方法，首先介绍间接方法所依据的择近原则.

择近原则Ⅰ 设 $\underset{\sim}{A}_i \in \mathscr{F}(U)(i=1,2,\cdots,n)$,对给定 $\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$,若 $\exists j \in \{1,2,\cdots,n\}$,使

$$D(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_j) = \max\{D(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_1),\cdots,D(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_n)\}$$

则认为 $\underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A}_j$ 最贴近，而应把 $\underset{\sim}{B}$ 归入模式 $\underset{\sim}{A}_j$.

例8-2 现有茶叶等级标准样品五种：$\underset{\sim}{\mathrm{I}}$、$\underset{\sim}{\mathrm{II}}$、$\underset{\sim}{\mathrm{III}}$、$\underset{\sim}{\mathrm{IV}}$、$\underset{\sim}{\mathrm{V}}$ 及待识别的茶叶模型，确定 A 的型号.

解 取反映茶叶质量的因素为论域 U,

$$U = \{条索,色泽,净度,汤色,香气,滋味\}$$

假定 U 上的模糊集为:

$$\underset{\sim}{\mathrm{I}} = (0.5,\ 0.4,\ 0.3,\ 0.6,\ 0.5,\ 0.4)$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{II}} = (0.3,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.2)$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{III}} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.2)$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{IV}} = (0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1)$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{V}} = (0,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1)$$

$$\underset{\sim}{A} = (0.4,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6)$$

利用格贴近度公式计算可得：

$D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{\mathrm{I}}) = 0.5$; $D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{\mathrm{II}}) = 0.3$; $D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{\mathrm{III}}) = 0.2$; $D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{\mathrm{IV}}) = 0.1$; $D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{\mathrm{V}}) = 0.1$;

按择近原则，可以确定 $\underset{\sim}{A}$ 为 $\underset{\sim}{\mathrm{I}}$ 型茶叶.

8.3 多元模糊模式识别

现实问题中，有的事物具有多种特征，若仅依照某一种特性

来识别，显然并非十分合理，通常需同时考察几种特性，此时就要用到择近原则Ⅱ.

择近原则Ⅱ　设有模式 $\underset{\sim}{A}_i \in \mathscr{F}(U)(i=1,2,\cdots,n)$ 每个模式由 m 个特性来描述，分别用 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 来表示. 于是有 $n\times m$ 个表示模式不同特性的模糊集 $\underset{\sim}{A}_{ij} \in \mathscr{F}(X_j)(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$，又设待识别的对象 $\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$ 的 m 个特性模糊集为 $\underset{\sim}{B}_j \in \mathscr{F}(X_j)(j=1,2,\cdots,m)$. 对 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$，求出

$$S_i=\min\{D(\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{A}_{i1}),\ D(\underset{\sim}{B}_2,\underset{\sim}{A}_{i2}),\ \cdots,\ D(\underset{\sim}{B}_m,\ \underset{\sim}{A}_{im})\}$$

若 $S_{i_0}=\max\{S_1,\ S_2,\cdots,S_n\}$

则认为待识对象最贴近第 i_0 个模式，即应归于第 i_0 类.

应用择近原则Ⅱ对事物进行识别，就称为多元模糊模式识别，此方法适用于具有多个特性事物的识别问题.

例 8-3　小麦亲本识别(参见文献[16])：

以每株小麦作为讨论对象 u，其全体构成论域 U，而对每株小麦同时考察五个特性：抽穗期，株高，有效穗数，主穗粒数，百粒重，分别用 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 表示. 现有五种小麦亲本类型：早熟型，矮杆型，大粒型，高肥丰产型，中肥丰产型. 由统计知识可知，每类亲本在各特性上的表现均是正态模糊集，用 $\underset{\sim}{A}_{ij}$表示第 i 类亲本的第 j 种特性对应的模糊集，其隶属函数一般采用中间型的正态模糊分布：

$$\underset{\sim}{A}_{ij}(x_j)=\begin{cases}\exp\left[\dfrac{-(x_j-a_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2}\right], & x_j<a_{ij}\\ 1\qquad, & a_{ij}\leqslant x_j\leqslant b_{ij}\\ \exp\left[\dfrac{-(x_j-b_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2}\right], & x_j>b_{ij}\end{cases}$$

个别模糊集可采用偏小型正态模糊分布（如早熟在抽穗期上的表现 $\underset{\sim}{A}_{11}$，矮杆在株高上的表现 $\underset{\sim}{A}_{22}$）：

$$\underset{\sim}{A}_{ii}(x_i) = \begin{cases} 1 , & x_i \leqslant b_{ii} \\ \exp\left[\dfrac{-(x_i - b_{ii})^2}{\sigma_{ii}^2}\right], & x_i > b_{ii} \end{cases} \quad (i = 1,2)$$

上面各式中的参数 a_{ij}，b_{ij}，σ_{ij}可由统计方法确定，具体值见表8-1.

表8-1 小麦表本识别参数值

亲本 / 性状	早熟			矮秆			大粒		
	a_{1j}	b_{1j}	σ_{1j}	a_{2j}	b_{2j}	σ_{2j}	a_{3j}	b_{3j}	σ_{3j}
抽穗期	—	6.7	1.1	5.5	9.6	1.0	5.8	11.9	1.2
株高	67.1	87.7	50.0	—	70.0	72.4	67.9	90.9	52.2
有效穗数	9.1	11.2	18.1	8.3	18.2	10.8	9.4	13.2	15.6
主穗粒数	40.2	55.0	92.0	37.5	52.3	80.7	44.2	54.5	121.3
百粒重	3.0	4.4	0.3	2.4	3.4	0.3	4.0	6.0	0.3

亲本 / 性状	高肥丰产			中肥丰产		
	a_{4j}	b_{4j}	σ_{4j}	a_{5j}	b_{5j}	σ_{5j}
抽穗期	5.2	11.3	0.9	5.1	8.9	1.2
株高	67.9	81.2	35.9	76.5	84.6	57.5
有效穗数	9.8	13.2	11.3	7.2	13.2	5.8
主穗粒数	41.2	51.0	113.3	37.6	48.3	93.9
百粒重	3.6	4.2	0.3	3.3	4.0	0.2

待识别亲本记为 $\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$，其对应于第 j 种特性的模糊集记为 $\underset{\sim}{B}_j \in \mathscr{F}(X_j)$，它的隶属函数规定为

$$\underset{\sim}{B}_j(x_j) = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{-(x_j - a_j)^2}{\sigma_j^2}\right], & x_j < a_j \\ 1 , & a_j \leqslant x_j \leqslant b_j \\ \exp\left[\dfrac{-(x_j - b_j)^2}{\sigma_j^2}\right], & x_j > b_j \end{cases}$$

计算 $\underset{\sim}{A}_{ij}$与 $\underset{\sim}{B}_j$ 的贴近度 D_g ($\underset{\sim}{B}_j$, $\underset{\sim}{A}_{ij}$)（也可采用别的贴近度），求出

$$s_i = \bigwedge_{j=1}^{5} D_g(\underset{\sim}{A}_{ij},\ \underset{\sim}{B}_j)$$

最后按择近原则Ⅱ，即可判断 $\underset{\sim}{B}$ 与哪种亲本最贴近.

如果考虑到五种特性在判断亲本类型中所起的作用不同，可以对它们加权，即可定义

$$s_i = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j D_g(\underset{\sim}{A}_{ij},\ \underset{\sim}{B}_j)$$

其中 $\sum_{j=1}^{5} \alpha_j = 1$，$\alpha_j \in [0,1]$

说明：在实际应用中，为使计算方便，往往把服从正态分布的模糊变量的隶属函数 $\underset{\sim}{A}(x) = e^{-(x-\bar{x})^2/\sigma^2}$ 近似取作

$$\underset{\sim}{A}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}, & |x-\bar{x}| \leqslant \delta \\ 0, & |x-\bar{x}| > \delta \end{cases}$$

在应用模糊识别方法对实际问题进行识别时，一般有如下几个步骤：

(1) 根据经验（或资料）选取研究对象的标准模式；

(2) 选取能描述研究对象特性的特征量的个数及其量值；

(3) 确定标准模式的特征量模糊子集的隶属函数；

(4) 确定待识别对象的特征量模糊子集的隶属函数；

(5) 定义贴近度，并计算待判对象与已知模式特征量的模糊子集之间的贴近度；

(6) 利用择近原则将待判对象归类.

8.4 模糊模式识别应用举例

本节选择若干实例，供读者处理实际问题时参考.

例 8-4 三角形识别.

在机器自动识别染色体或白血球分类等课题中，常把问题归结为几何图形的识别，而几何图形又常常划分为若干三角形图

形. 通常把三角形分为等腰三角形 $\underset{\sim}{I}$，直角三角形 $\underset{\sim}{R}$，等腰直角三角形 $\underset{\sim}{I} \cap \underset{\sim}{R}$，正三角形 $\underset{\sim}{E}$ 及非典型三角形 $\underset{\sim}{T} = (\underset{\sim}{I} \cup \underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{E})^c$，且设论域

$$U = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma, \alpha + \beta + \gamma = 180\}$$

其中 α，β，γ 为三内角度数，若分别规定它们的隶属函数为：

$$\underset{\sim}{I}(\alpha, \beta, \gamma) \triangleq 1 - \frac{[(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma)]}{60}$$

其理由是：当 $\alpha = \beta$ 或 $\beta = \gamma$ 时（真正等腰三角形），$I(\alpha, \beta, \gamma) = 1$，同时，当 $\alpha = 120$，$\beta = 60$，$\gamma = 0$ 时（绝对不是等腰三角形），$\underset{\sim}{I}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$；

$$\underset{\sim}{R}(\alpha, \beta, \gamma) \triangleq 1 - \frac{|\alpha - 90|}{90}$$

其理由是：当 $\alpha = 90$ 且 β、$\gamma \neq 0$ 时，$\underset{\sim}{R}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$（真正直角三角形），而且当 $\alpha = 180$，而且 $\beta = \gamma = 0$ 时（绝对不是直角三角形），$\underset{\sim}{R}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$；

$$(\underset{\sim}{I} \cap \underset{\sim}{R})(\alpha, \beta, \gamma) = \underset{\sim}{I}(\alpha, \beta, \gamma) \wedge \underset{\sim}{R}(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$= 1 - \vee \left\{\frac{[(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma)]}{60}, \quad \frac{|\alpha - 90|}{90}\right\}$$

$$\underset{\sim}{E}(\alpha, \beta, \gamma) \triangleq 1 - \frac{(\alpha - \gamma)}{180}$$

其理由是：当 $\alpha = \beta = \gamma$ 时（真正等边三角形），$\underset{\sim}{E}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$，当 $\alpha = 180$，$\beta = \gamma = 0$ 时（绝对不是等边三角形），$\underset{\sim}{E}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

$$\underset{\sim}{T}(\alpha, \beta, \gamma) = (\underset{\sim}{I} \cup \underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{E})^c(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$= (\underset{\sim}{I}^c \cap \underset{\sim}{R}^c \cap \underset{\sim}{E}^c)(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$= [1 - \underset{\sim}{I}(\alpha, \beta, \gamma)] \wedge [1 - \underset{\sim}{R}(\alpha, \beta, \gamma)] \wedge$$

$$[1 - \underset{\sim}{E}(\alpha,\beta,\gamma)]$$

$$= \wedge \left[\frac{((\alpha-\beta)\wedge(\beta-\gamma))}{60},\frac{|\alpha-90|}{90},\frac{|\alpha-\gamma|}{180}\right]$$

$$= \wedge \frac{[(3(\alpha-\beta),3(\beta-\gamma)),2|\alpha-90|,|\alpha-\gamma|]}{180}$$

对于给定的三角形 $u_0 = (85, 50, 45)$，由于

$$\underset{\sim}{I}(u_0) = 0.916,\ \underset{\sim}{R}(u_0) = 0.94,\ \underset{\sim}{E}(u_0) = 0.7,$$

$$(\underset{\sim}{I} \cap \underset{\sim}{R})(u_0) = 0.916,\ \underset{\sim}{T}(u_0) = 0.06,$$

所以按最大隶属原则，u_0 相对归类于直角三角形.

例 8-5 岩体工程识别(参见文献[17])：

设岩石按抗压强度可分为：很好，好的，较好的，差的，很差的五类，每类对应的模糊集分别记为 $\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，$\underset{\sim}{A}_3$，$\underset{\sim}{A}_4$，$\underset{\sim}{A}_5$，其隶属函数曲线见图 8-2.

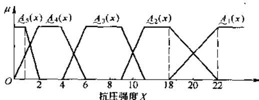


图 8-2 岩石抗压强度等级

今有某项岩体工程经实地测量应用统计方法获得岩石抗压强度对应的模糊集 $\underset{\sim}{B}$，它的隶属函数曲线见图 8-3.

上述各模糊集的隶属函数可由图像直接写出. 问此类岩石体应属于哪一类？

解 取论域为 X_+，定义算法

$$D_N(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 1 - (\check{\underset{\sim}{A}} - \hat{\underset{\sim}{A}}) + (\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B})$$

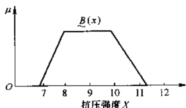


图 8-3　某岩体岩石抗压强度

其中 $\check{\underset{\sim}{A}}(x)=\bigvee_{x\in X_+}\underset{\sim}{A}(x)$，　$\hat{\underset{\sim}{A}}(x)=\bigwedge_{x\in X_+}\underset{\sim}{A}(x)$.

可以验证 D_N 满足贴近度的三条要求，故 D_N 可作为贴近度.

又通过计算，有

$D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_1)=0$，$D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_2)=0.688$，$D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_3)=1$，$D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_4)=0$，$D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_5)=0$，而

$$\max\{D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_1),\ D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_2),\ D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_3),\ D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_4),\ D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_5)\}$$

$$=\max\{0,0.688,1,0,0\}=D_N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}_3)$$

由择近原则Ⅰ，我们认为此岩石体应归为第三类（较好的）岩石，也可以说，它以隶属度 1 属于较好的岩石，而以隶属度 0.688 属于好的岩石.

例 8-6　条码识别(参见文献[18])：

现以阿拉伯数字的识别问题来说明. 首先将作为模式的 0，1，2，…，9 分别用 $m\times n$ 模糊矩阵来表征，比如对于模式 $K\in\{0,1,\cdots,9\}$，用 $m\times n$ 个网格将 K 置在中间，如图 8-4. 对 (i,j) 位置的网格，根据 K 所覆盖的多少赋予数值 r_{ij} $(0\leqslant r_{ij}\leqslant 1)$. 例如 K 覆盖网格的一半，可取 $r_{ij}=1/2$，K 覆盖网格 1/3，可取 $r_{ij}=$

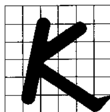


图 8-4　网格覆盖"K"示意图

1/3，如此对每个模式可得到一个模糊矩阵，分别设为 R_0，R_1，…，R_9.

设有一个数字 β，由于印刷或别的某种原因，显得有些模糊不清，我们要确定 β 是哪一个数字，可用构造上述矩阵方法先构造出 R_β，然后根据某种贴近度计算方式求出 $D(R_\beta, R_i)$ $(i=0, 1, 2, \cdots, 9)$，若

$$D(R_\beta,R_j) = \max\{D(R_\beta,R_0), D(R_\beta,R_1), \cdots, D(R_\beta,R_9)\}$$

则根据择近原则认为 β 就是 j.

例 8-7 工具钢碳化物等级识别[19]：

在金属材料工业中，经常要对钢材中碳化物的等级进行评定. 以工具钢的金相图作为讨论对象 u，其全体构成论域 U.

第一步 根据国家标准 GB1299—85，工具钢共晶碳化物的不均匀性共分 8 个等级，每个等级有一个标准图谱，它们都是 U 上的模糊集. 记为 $\underset{\sim}{A}_i \in \mathscr{F}(U)$ $(i=1, 2, \cdots, 8)$. 待评定等级的碳化物金相图也是 U 上的模糊集，记为 $\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$.

第二步 选取四个指标作为描述碳化物等级的特征量，它们分别为：

(1) 碳化物颗粒的个数；

(2) 碳化物颗粒的平均截面积；

(3) 碳化物的平均带宽；

(4) 碳化物的最大带宽.

分别用 x_1，x_2，x_3，x_4 表示之.

第三步 每个等级的碳化物在各特性上的表现均是正态模糊集，用 $\underset{\sim}{A}_{ij} \in \mathscr{F}(U)$ $(i=1, 2, \cdots, 8;\ j=1, 2, 3, 4)$ 表示第 i 等级的碳化物在第 j 个指标上的模糊集，其隶属函数定义为

$$\underset{\sim}{A}_{ij}(x_j) = \exp\left[\frac{-(x_j - a_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2}\right]$$

其中 a_{ij}，σ_{ij}（$i=1, 2, \cdots, 8$；$j=1, 2, 3, 4$）为参数，可由统计方法得到，它们的值见表 8-2.

表 8-2　碳化物等级识别参数值

级别 / 特征	一级 a_{1j}	一级 σ_{1j}	二级 a_{2j}	二级 σ_{2j}	三级 a_{3j}	三级 σ_{3j}	四级 a_{4j}	四级 σ_{4j}	五级 a_{5j}	五级 σ_{5j}
颗粒个数	1040	1.5	800	1.6	600	2	590	2.3	400	1.8
颗粒平均截面积	60	1.6	80	1.7	85	1.9	110	2	145	2
平均带宽	0	3	0	2.5	0	3.1	10	1.8	20	1.4
最大带宽	0	2	0	1.8	52	2	72	2.5	96	1.6

级别 / 特征	六级 a_{6j}	六级 σ_{6j}	七级 a_{7j}	七级 σ_{7j}	八级 a_{8j}	八级 σ_{8j}	待定级 b_j	待定级 σ_j
颗粒个数	390	2	360	2.5	240	3.2	750	2
颗粒平均截面积	180	2.5	280	1.8	380	2	90	1.5
平均带宽	38	1.8	42	2	56	1.6	0	3
最大带宽	136	1.7	176	2.5	224	1.8	0	2

第四步　待定等级碳化物在第 j 个指标上的模糊集，记为 $B_j \in \mathscr{F}(x_j)$，其隶属函数规定为

$$\underset{\sim}{B}_j = \exp\left[\frac{-(x_j - b_j)^2}{\sigma_j^2}\right]$$

其中 b_j，σ_j（$j=1, 2, 3, 4$）的值见表 8-2.

第五步　计算格贴近度. 由

$$\underset{\sim}{A}_{ij}(x_j) = \exp\left[\frac{-(x_j - a_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2}\right]$$

$$\underset{\sim}{B}_j(x_j) = \exp\left[\frac{-(x_j - b_j)^2}{\sigma_j^2}\right]$$

有
$$D_g(\underset{\sim}{A}_{ij}, \underset{\sim}{B}_j) = \exp\left[\frac{-(a_{ij} - b_j)^2}{(\sigma_{ij} + \sigma_j)^2}\right]$$

从而可近似取

$$D_g(\underset{\sim}{A}_{ij}, \underset{\sim}{B}_j) = \begin{cases} 1 - \dfrac{c_j(a_{ij} - b_j)^2}{(\sigma_{ij} + \sigma_j)^2}, & |a_{ij} - b_j| \leqslant \sigma_{ij} + \sigma_j \\ 0, & |a_{ij} - b_j| > \sigma_{ij} + \sigma_j \end{cases}$$

其中 c_j ($j=1, 2, 3, 4$) 是适当选取的正常数.

若取 $c_1 = 10^{-4}$, $c_2 = 10^{-4}$, $c_3 = 10^{-3}$, $c_4 = 10^{-4}$, 计算

$$s_j = \bigwedge_{i=1}^{4} \{D_g(\underset{\sim}{A}_{ij}, \underset{\sim}{B}_j)(j = 1,2,\cdots,8)\}$$

则有

$s_1 = 0.3111$, $s_2 = 0.9804$, $s_3 = 0.8310$, $s_4 = 0.8624$,

$s_5 = 0.1527$, $s_6 = 0.1900$, $s_7 = 0.2495$, $s_8 = 0.0389$.

第六步　因为

$$\bigvee_{j=1}^{8} \{s_j\} = 0.9804 = s_2$$

所以由择近原则知该碳化物的等级应定为 2 级.

习　题　8

1. 水质按 D_0 含量(mg/L) 分级,论域 $U = [0,10]$,且 $\underset{\sim}{A}_1$(一级水), $\underset{\sim}{A}_2$(二级水) 均是 U 上的模糊集.

$$\underset{\sim}{A}_1(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 7 \\ \dfrac{(x-5)}{2}, & 5 < x < 7 \\ 0, & x \leqslant 5 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{A}_2(x) = \begin{cases} \dfrac{-(x-7)}{2}, & 5 \leqslant x < 7 \\ \dfrac{(x-3)}{2}, & 3 < x < 5 \\ 0, & x \leqslant 3 \text{ 或 } x \geqslant 7 \end{cases}$$

经抽样检查, 甲地水中含 D_0 值 5.5mg/L, 问甲地的水相对属于哪一级水.

2. 某三角形的内角为 120°、50°、10°, 试用例 8-4 中的隶属函数, 判

别此三角形应属于哪一类三角形.

3. 在小麦亲本识别中，以小麦百粒重为论域 U，五个基本类型是如下模糊集：

早　　熟：$\underset{\sim}{A}_1(x) = e^{-\left(\frac{x-3.7}{0.3}\right)^2}$

高肥丰产：$\underset{\sim}{A}_2(x) = e^{\left(\frac{x-3.9}{0.3}\right)^2}$

矮　　杆：$\underset{\sim}{A}_3(x) = e^{-\left(\frac{x-2.9}{0.3}\right)^2}$

中肥丰产：$\underset{\sim}{A}_4(x) = e^{-\left(\frac{x-3.7}{0.2}\right)^2}$

大　　粒：$\underset{\sim}{A}_5(x) = e^{-\left(\frac{x-5.6}{0.3}\right)^2}$

(1) 现测得一个小麦品种的样品的百粒重为 $x_0 = 4.6$ (g). 试判定 x_0 代表的品种属于哪个亲本；

(2) 现有一种不知品种的小麦亲本

$$\underset{\sim}{B}(x) = e^{-\left(\frac{x-3.43}{0.28}\right)^2}$$

按择近原则判断 $\underset{\sim}{B}$ 属于哪个类型.

4. 若给定论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 上三个标准模糊集：

$$\underset{\sim}{A}_1 = (0.8, 0.4, 0.9, 0.1)$$

$$\underset{\sim}{A}_2 = (0.4, 0.3, 0.8, 0.6)$$

$$\underset{\sim}{A}_3 = (0.2, 0.7, 0.2, 0.8)$$

今有 U 上一待识别模糊集 $\underset{\sim}{B} = (0.3, 0.5, 0.1, 0.4)$，问 $\underset{\sim}{B}$ 与哪个 $\underset{\sim}{A}_i$ $(i=1, 2, 3)$ 最接近?

第 9 章　模 糊 规 划

规划问题渗透于国民经济的各个部门和科学技术的各个领域，有着诱人的应用前景，规划分普通规划和模糊规划．本章先介绍模糊极值的概念，然后着重介绍模糊规划．

9.1　模糊极值

9.1.1　无约束条件的模糊极值

首先，回顾一下实值函数的极值概念．设 X 是给定的非空集合，f 是定义在 X 上的有界实值函数．若有 $x^* \in X$，使 $f(x^*) = \max\limits_{x \in X} f(x)$，则称 x^* 为函数 f 的极大点，而 $f(x^*)$ 称为 f 的极大值；$-f$ 的极大点（值）称为 f 的极小点（值）．这就是普通无条件极值概念．而

$$M \triangleq \left\{ x^* \mid f(x^*) = \max_{x \in X} f(x) \right\}$$

称为 f 的优越集．当 $x \in M$ 时，我们达到最优目的，当 $x \overline{\in} M$ 时，虽然都未能达到最优目的，但各点的程度却有很大的差别．为了全面反映各点的优越程度，下面我们构造一种模糊优越集，以它的隶属函数来表示各点的优越程度．

定义 9-1　设 f: $X \to Y$，令 $\underset{\sim}{M}_f \in \mathscr{F}(X)$，它的隶属函数定义为

$$\underset{\sim}{M}_f(x) \triangleq \frac{f(x) - \inf f(x)}{\sup f(x) - \inf f(x)}$$

$\underset{\sim}{M}_f$ 称为 f 的无条件模糊优越集，也称为 f 的无条件模糊极大集；而 $f(\underset{\sim}{M}_f) \in \mathscr{F}(Y)$ 称为 f 的无条件模糊极大值，其隶属函数定义为

$$f(\underset{\sim}{M}_f)(y) = \bigvee_{f(x)=y} \underset{\sim}{M}_f(x)$$

其中 Y 为实数域，f 有界.

显见，当 $f(x_1) = \max_{x \in X} f(x)$ 时，$\underset{\sim}{M}_f(x_1) = 1$；当 $f(x_2) = \min_{x \in X} f(x)$ 时，$\underset{\sim}{M}_f(x_2) = 0$，且 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ 时，$\underset{\sim}{M}_f(x_1) \geqslant \underset{\sim}{M}_f(x_2)$，因此 $\underset{\sim}{M}_f(x)$ 反映了在模糊意义下，x 的优越程度.

又当 $y_1 = \max_{x \in X} f(x)$ 时，$f(\underset{\sim}{M}_f)(y_1) = \bigvee_{f(x)=y_1} \underset{\sim}{M}_f(x_1) = 1$；当 $y_2 = \min_{x \in X} f(x)$ 时，$f(\underset{\sim}{M}_f)(y_2) = \bigvee_{f(x)=y_2} \underset{\sim}{M}_f(x_2) = 0$，当 $y \overline{\in} f(X)$ 时，$f(\underset{\sim}{M}_f)(y) = \bigvee_{\Phi} = 0$，因此 $f(\underset{\sim}{M}_f)(y)$ 反映了在模糊意义下，y 对 f 的模糊极大值的隶属程度.

例 9-1 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，$f: X \to Y$（$Y$ 为实数域），定义 $f(x_1) = 0$，$f(x_2) = 3$，$f(x_3) = -1$，$f(x_4) = 1$，$f(x_5) = 1$，则 $\max f(x) = 3$，$\min f(x) = -1$，且

$$\underset{\sim}{M}_f(x_i) = \frac{f(x_i) + 1}{4} \qquad (i = 1, 2, \cdots, 5)$$

于是
$$\underset{\sim}{M}_f = (0.25,\ 1,\ 0,\ 0.5,\ 0.5)$$

又
$$f(\underset{\sim}{M}_f)(0) = \bigvee_{f(x)=0} \underset{\sim}{M}_f(x) = \underset{\sim}{M}_f(x_1) = 0.25$$

$$f(\underset{\sim}{M}_f)(3) = \underset{\sim}{M}_f(x_2) = 1$$

$$f(\underset{\sim}{M}_f)(-1) = \underset{\sim}{M}_f(x_3) = 0$$

$$f(\underset{\sim}{M}_f)(1) = \bigvee_{f(x)=1} \underset{\sim}{M}_f(x) = \underset{\sim}{M}_f(x_4) \vee \underset{\sim}{M}_f(x_5) = 0.5$$

故
$$f(\underset{\sim}{M}_f) = \frac{0.25}{0} + \frac{1}{3} + \frac{0}{-1} + \frac{0.5}{1}$$

f 的无条件模糊极小集 $\underset{\sim}{m}_f$ 定义为 $-f$ 的无条件模糊极大集，显然有

$$\underset{\sim}{m}_f(x) = \frac{\sup f(x) - f(x)}{\sup f(x) - \inf f(x)} \quad (\forall x \in X)$$

且有 $$\underset{\sim}{M}_f(x) + \underset{\sim}{m}_f(x) = 1 \quad (\forall x \in X)$$

因此极小集 $\underset{\sim}{m}_f$ 是极大集 $\underset{\sim}{M}_f$ 的余集.

9.1.2 约束条件下的模糊极值

9.1.2.1 普通约束条件下的模糊极值

高等数学中的条件极值可用集合论的语言来描述. 若 $\exists$ $x^* \in A \subseteq X$,使 $f(x^*) = \max\limits_{x \in A} f(x)$,则 $f(x^*)$ 称为 f 在 A 上的条件极大值,x^* 称为 f 在 A 上的条件极大点. 而

$$M^* \triangleq \left\{ x^* \mid x^* \in A,\ f(x^*) = \max_{x \in A} f(x) \right\}$$

为 f 在 A 上的优越集.

优越集 M^* 虽给出了 f 在 A 上取极大值的那些点，但却不能反映所有 $x \in A$ 的点对整个目标函数的优越程度. 为了描述满足条件 A 的各个点对整个目标函数的优越程度，我们引进条件模糊优越集和条件模糊极大值的概念.

定义 9-2 设 f: $X \to Y$, $A \in \mathscr{P}(X)$ 为约束条件，令

$$\underset{\sim}{A}_f \triangleq A \cap \underset{\sim}{M}_f$$

$\underset{\sim}{A}_f$ 称为 f 在 A 上的（条件）模糊优越集；而 $f(\underset{\sim}{A}_f)$ 称为 f 在 A 上的(条件)模糊极大值，其隶属函数为

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{A}_f)(y) &= \bigvee_{f(x)=y} \underset{\sim}{A}_f(x) \\ &= \bigvee_{f(x)=y} (A(x) \wedge \underset{\sim}{M}_f(x)) \\ &= \vee \left\{ \underset{\sim}{M}_f(x) \mid x \in A,\ f(x) = y \right\} \end{aligned}$$

其中 Y 为实数域, f 有界.

$f(\underset{\sim}{A}_f)(y)$ 表示在条件 A 的约束下，对整个目标函数来说，y 作为模糊极大值的隶属度. 它既反映了条件 A 的约束，又反映了 y 在整个目标函数中所处地位.

9.1.2.2 模糊约束条件下的模糊极值

仿前，我们给出模糊约束条件下，目标函数 f 的模糊极大值.

定义 9-3 设 $f: X \to Y$，$\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(X)$ 为模糊约束条件，令

$$\underset{\sim}{A}_f \triangleq \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{M}_f$$

$\underset{\sim}{A}_f$ 称为 f 在 $\underset{\sim}{A}$ 上的(条件)模糊优越集；而 $f(\underset{\sim}{A}_f)$ 称为 f 在 $\underset{\sim}{A}$ 上的(条件)模糊极大值，其隶属函数为

$$f(\underset{\sim}{A}_f)(y) = \bigvee_{f(x)=y} \underset{\sim}{A}_f(x)$$

$$= \bigvee_{f(x)=y} (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{M}_f(x))$$

其中 Y 为实数域，f 有界.

由于 $(\underset{\sim}{A}_f)_\lambda = A_\lambda \cap (\underset{\sim}{M}_f)_\lambda$，表明当 $\underset{\sim}{A}_f(x) = \lambda$ 时，意味着既要求 x 对约束条件集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属程度达到或超过 λ 水平，同时要求 x 对目标函数 f 来说，其优越程度也达到或者超过 λ 水平. 因此 $\underset{\sim}{A}_f(x)$ 既反映了 x 接受 $\underset{\sim}{A}$ 的限制程度，又反映了 $f(x)$ 达到理想目标的程度.

关于有约束条件下的模糊极小值问题，可如无约束条件模糊极值那样，转化为 $-f$ 的模糊极大值问题.

例 9-2 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 是五个人的集合，经测量，X 中每人的身高 $f(x)$ 如表 9-1 所示.

表 9-1 身高数据

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x)$	1.72	1.80	1.65	1.74	1.68

再设
$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{0.8}{x_4} + \frac{0.9}{x_5}$$

表示 X 中"年轻人"的模糊集，求 X 中年轻人的最高者.

解 这是求 f 在模糊约束 $\underset{\sim}{A}$ 下的极值问题，计算结果见

表 9-2.

表 9-2 优越集表

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\underset{\sim}{M}_f(x)$	0.47	1	0	0.6	0.2
$\underset{\sim}{A}(x)$	0.7	0.5	1	0.8	0.9
$\underset{\sim}{A}_f(x)$	0.47	0.5	0	0.6	0.2

由于 $$f(\underset{\sim}{A}_f)=\frac{0.47}{1.72}+\frac{0.5}{1.80}+\frac{0}{1.65}+\frac{0.6}{1.74}+\frac{0.2}{1.68}$$

故由最大隶属原则，x_4 是 X 中年轻人的最高者.

9.2 模糊规划

人们在办某件事情或做某项工作时，如果有多种方法可供选择，一般总是设法从中选择能获得最好结果的那一种方法. 例如，某种产品有 m 个产地，有 n 个销地，如果每个产地的产量和每个销地的销量以及由产地到销地的路程、运费单价都是已知的，那么如何调运产品使得总运费最省呢？又如，一个工厂在现有的人力、设备、资金等条件下，如何组织生产，才能获得最好经济效益呢？以上问题都可归纳为在满足一定的约束条件下，求目标函数的最优（最大或最小）值，这就是所谓的规划问题.

规划中的约束条件和目标函数都是清晰的，就是普通规划；约束条件或目标函数带有模糊性，就是模糊规划.

9.2.1 单目标模糊规划

模糊规划问题的一般提法：给定目标函数 $f:X\to Y$ 及 X 的模糊集 $\underset{\sim}{A}$，要求选择 x^*，使得 x^* 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属程度及 x^* 对目标函数值 $f(x^*)$ 都尽可能地达到高水平，其中 Y 为实数集，f 有界.

例如，9.1 节介绍过的模糊约束条件下的极值问题，就是一类模糊规划问题.

模糊规划的求解步骤如下：

（1）**压缩映射** 求无条件模糊优越集 $\underset{\sim}{M}_f$，而

$$\underset{\sim}{M}_f(x)=\frac{f(x)-\inf f(x)}{\sup f(x)-\inf f(x)}$$

（2）**模糊判决** 求条件模糊优越集 $\underset{\sim}{A}_f=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{M}_f$，而

$$\underset{\sim}{A}_f(x)=\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{M}_f(x)$$

（3）**确定判决** 即选择 x^*，满足

$$\underset{\sim}{A}_f(x^*)=\max_{x\in X}\underset{\sim}{A}_f(x)$$

我们把$\max\limits_{x\in X}\underset{\sim}{A}_f(x)$称为 $\underset{\sim}{A}$ 对目标f的可能度，它反映了在 $\underset{\sim}{A}$ 的约束下，能够达到理想目标的最大可能性；x^*称为f在 $\underset{\sim}{A}$ 约束下的极大点，也称为模糊规划的最优解. $f(x^*)$ 称为f在 $\underset{\sim}{A}$ 约束下的极大值.

在模糊判决这一步中，根据实际情况，可以把（2）步修改为：

（2′）凸模糊判决

$$\underset{\sim}{A}_f=a\underset{\sim}{A}+b\underset{\sim}{M}_f$$

$$\underset{\sim}{A}_f(x)=a\underset{\sim}{A}(x)+b\underset{\sim}{M}_f(x)$$

其中 $a+b=1$，$a\geqslant0$，$b\geqslant0$.

（2″）积模糊判决

$$\underset{\sim}{A}_f=\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{M}_f$$

$$\underset{\sim}{A}_f(x)=\underset{\sim}{A}(x)\cdot\underset{\sim}{M}_f(x)$$

例 9-3 在某种食品中投放某种调味剂，每公斤食品中的含量设为x克，对顾客爱好作调查统计，得爱好函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)}, & 0\leqslant x\leqslant100\\ 0\ , & x>100\end{cases}$$

对于使爱好函数值越大的 x 值，所制产品越畅销，因而收益越大，但是由于成本核算等等原因，对 x 值需要进行限制，这种限制集合的边界是模糊的，即 x 的约束条件为一模糊集 $\underset{\sim}{A}$，其隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1+(x-1)^2}, & x>1\end{cases}$$

试确定合理的剂量 x^*，使得在接受约束的条件下，获得最优收益.

解 这是一个规划问题，分三步进行.

（1）求无条件模糊优越集 $\underset{\sim}{M}_f$，由于

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)}-\frac{x}{20}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=10$. 又当 $x<10$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>10$ 时，$f'(x)<0$，因而 $\sup f(x)=f(10)=5$，$\inf f(x)=f(0)=0$. 因此：

$$\underset{\sim}{M}_f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{10}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)}, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 0, & x>100\end{cases}$$

（2）求条件模糊优越集 $\underset{\sim}{A}_f$

$$\underset{\sim}{A}_f(x)=\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{M}_f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{10}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)}, & 0\leqslant x\leqslant x^*\\ \dfrac{1}{1+(x-1)^2}, & x^*<x\leqslant 100\\ 0, & x>100\end{cases}$$

其中 x^* 满足方程

$$\frac{x}{10}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)}=\frac{1}{1+(x-1)^2}\tag{9.1}$$

（3）选择 x^*，使

$$\underset{\sim}{A}_f(x^*) = \max_{x \in X} \underset{\sim}{A}_f(x)$$

因此，最佳剂量 x^* 应满足方程 (9.1)，x^* 的近似值可取 $x^* \approx 2.085$g，而

$$\underset{\sim}{A}_f(x^*) = \frac{1}{1+(x^*-1)^2} \approx 0.4593$$

即 $\underset{\sim}{A}$ 对目标f的可能度为45.93%，而要实现这种可能性，应选择调味剂的最佳剂量为2.085g（见图9-1）.

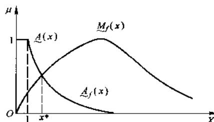


图9-1　$\underset{\sim}{A}_f$ 的隶属函数曲线

需要说明的是，在本例中如果将约束条件确切化，以 $\underset{\sim}{A}$ 的核[0,1]为约束，这是一个普通规划问题，所得结论是应选择最佳剂量为1g. 从约束条件看，已是100%遵守，但所能达到的最高目标相对整个目标函数来说是很低的，由 $\underset{\sim}{M}_f(1) = 0.246$，说明相对整个目标来说，其优越程度仅达到24.6%. 如果把条件放松为模糊约束条件 $\underset{\sim}{A}$. 且适当降低 $\underset{\sim}{A}(x)$的水平，却可以获得较好的目标值. 如例中的结果，当 $x^* = 2.085$ 时，从接受约束条件来看虽仅达45.9%，但目标函数的优越程度也升到了45.9%，从而提高了整体优化水平. 由于在实际问题中，约束条件往往不是绝对的，有一定的伸缩性，模糊规划的思想就是利用这点灵活性，兼顾目标函数与约束条件综合地选择最优方案.

9.2.2 多目标、多约束的模糊规划

在多种模糊约束的条件下，希望对多种目标同时取得尽可能优越的值，这种规划问题称为多目标、多约束模糊规划，其数学模型如下：

设有 n 个目标函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots f_n(x)$ (f_i 有界)，m 个模糊约束集：$\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_m \in \mathscr{F}(X)$.

模型Ⅰ

(1) 压缩映射　求各 f_i 的无条件模糊优越集 $\underset{\sim}{M}_{f_i}$

$$\underset{\sim}{M}_{f_i}(x) = \frac{f_i(x) - \inf f_i(x)}{\sup f_i(x) - \inf f_i(x)} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

(2) 令　$\underset{\sim}{M}_f = \bigcap_{i=1}^{n} \underset{\sim}{M}_{f_i}$，　$\underset{\sim}{A} = \bigcap_{j=1}^{m} \underset{\sim}{A}_j$

(3) 模糊判决　求条件模糊优越集 $\underset{\sim}{A}_f = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{M}_f$，而

$$\underset{\sim}{A}_f(x) = \underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{M}_f(x)$$

$$= \left(\bigwedge_{j=1}^{m} \underset{\sim}{A}_j(x)\right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \underset{\sim}{M}_{f_i}(x)\right)$$

(4) 确定判决　选择 x^*，满足

$$\underset{\sim}{A}_f(x^*) = \max_{x \in X} \underset{\sim}{A}_f(x)$$

模型Ⅱ

(1) 压缩映射　求各 f_i 的无条件模糊优越集 $\underset{\sim}{M}_{f_i}$.

(2) 令　$\underset{\sim}{M}_f = \sum_{i=1}^{n} a_i \underset{\sim}{M}_{f_i} \left(a_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\right)$

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{j=1}^{m} b_j \underset{\sim}{A}_j \left(b_j \in [0,1], \sum_{j=1}^{m} b_j = 1\right)$$

而

$$\underset{\sim}{M}_f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underset{\sim}{M}_{f_i}(x)$$

$$\underset{\sim}{A}(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \underset{\sim}{A}_j(x)$$

$\underset{\sim}{M}_f$, $\underset{\sim}{A}$ 分别称为 $\underset{\sim}{M}_{f_i}(i=1,2,\cdots,n)$, $\underset{\sim}{A}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的加权平均.

（3）确定判决 选择 x^*，满足

$$\underset{\sim}{A}_f(x^*)=\max_{x\in X}\underset{\sim}{A}_f(x) \quad .$$

例 9-4 选购某类设备，希望质量尽可能好，价格尽量低，同时考虑操作简便，体型小等因素，可供选择的这类设备有五种型号，记为 $X=\{$ Ⅰ, Ⅱ, …, Ⅴ $\}$. 为达上述目的，进行了调研，结果见表 9-3，问应购哪种型号设备.

表 9-3 设备情况

项 目	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
质 量	好	较 好	很 好	较 差	一 般
价 格	1000	800	1000	500	600
操 作	较简便	简 便	一 般	简 便	较复杂
体 型	较 小	小	中 等	较 小	偏 大

解 将质量与价格当作目标函数，记为 $\underset{\sim}{M}_1$, $\underset{\sim}{M}_2$，操作与体型当作约束条件用 $\underset{\sim}{A}_1$, $\underset{\sim}{A}_2$ 表示. 因此这是两目标两约束的模糊规划问题. 把表 9-3 中的量转换为隶属度，便得到各模糊集的隶属函数（见表 9-4）.

表 9-4 隶 属 度

项 目	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
$\underset{\sim}{M}_1$	0.9	0.7	1	0.4	0.6
$\underset{\sim}{M}_2$	0.5	0.7	0.5	1	0.9
$\underset{\sim}{A}_1$	0.8	1	0.6	1	0.4
$\underset{\sim}{A}_2$	0.8	1	0.6	0.8	0.4

利用模型 Ⅱ，目标采用 $\underset{\sim}{M}_f=0.6\underset{\sim}{M}_1+0.4\underset{\sim}{M}_2$，约束采用 $\underset{\sim}{A}=0.5\underset{\sim}{A}_1+0.5\underset{\sim}{A}_2$，即

$$\underset{\sim}{M}_f = \frac{0.74}{\mathrm{I}} + \frac{0.7}{\mathrm{II}} + \frac{0.8}{\mathrm{III}} + \frac{0.64}{\mathrm{IV}} + \frac{0.72}{\mathrm{V}}$$

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.8}{\mathrm{I}} + \frac{1}{\mathrm{II}} + \frac{0.6}{\mathrm{III}} + \frac{0.9}{\mathrm{IV}} + \frac{0.4}{\mathrm{V}}$$

又

$$\underset{\sim}{A}_f = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{M}_f$$

$$= \frac{0.74}{\mathrm{I}} + \frac{0.7}{\mathrm{II}} + \frac{0.6}{\mathrm{III}} + \frac{0.64}{\mathrm{IV}} + \frac{0.4}{\mathrm{V}}$$

易见

$$\underset{\sim}{A}_f(\mathrm{I}) = 0.74 = \max_{x \in X} \underset{\sim}{A}_f(x)$$

这表明应购买型号 I 设备.

9.3 模糊线性规划

9.3.1 模糊线性规划

在规划学中，线性规划是应用很广的一个分支. 本节介绍在模糊约束下的线性规划. 我们仅讨论最大问题（最小问题可转化为 $-z$ 的最大问题处理），其模型如下：

$$\begin{cases} \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \lesssim b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \lesssim b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \lesssim b_m \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \cdots, \quad x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

其中“$\lesssim$”表示一种弹性约束，可读作“近似小于等于”.

下面引入模糊约束集的概念.

设 $X = \{x \mid x \in R^n, \ x \geqslant 0\}$，对每个约束 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \lesssim b_i$，相应地有 X 中一个模糊子集 $\underset{\sim}{D}_i$ 与之对应，它的隶属函数为

$$\underset{\sim}{D}_i(x) = f_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

$$= \begin{cases} 1, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \\ 1 - \frac{1}{d_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right), & b_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i + d_i \\ 0, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i + d_i \end{cases} \tag{9.2}$$

其中 d_i 是适当选择的常数，叫做伸缩指标，$d_i \geqslant 0$（$i = 1, 2, \cdots, m$）. 令

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}_1 \cap \underset{\sim}{D}_2 \cap \cdots \cap \underset{\sim}{D}_m \in \mathscr{F}(X)$$

称为对应于约束条件 $Ax \lesssim b(x \geqslant 0)$ 的模糊约束集.

易见，当 $d_i = 0$（$i = 1, 2, \cdots, m$）时，$\underset{\sim}{D}$ 退化为普通约束集 D，约束方程中"$\lesssim$"退化为"$\leqslant$".

模糊线性规划的模型可简记为

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax \lesssim b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.3}$$

下面我们来讨论式（9.3）的求解问题.

设 z_0，z_1 分别是普通线性规划

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.4}$$

与

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax \leqslant b + d \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.5}$$

的最优值，其中 $d = (d_1, d_2, \cdots, d_m)^T$ 称为式（9.3）的伸缩指标向量. d_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ 叫做第 i 个伸缩指标. z_0 与 z_1 对应两种极端情况，一种是完全接受约束（$\underset{\sim}{D}(x)=1$），另一种是完全不接受约束（$\underset{\sim}{D}(x)=0$），它们都不是我们所希望的. 我们的目的是适当降低隶属度 $\underset{\sim}{D}(x)$，使得最优值有所提高，且介于 z_0 与 z_1 之间. 为此构造模糊目标集 $\underset{\sim}{M} \in \mathscr{F}(x)$，其隶属函数为

$$\underset{\sim}{M}(x) = g\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)$$

$$= \begin{cases} 0 \quad , & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant z_0 \\ \dfrac{1}{d_0}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - z_0\right), & z_0 < \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant z_1 \\ 1 \quad , & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j > z_1 \end{cases}$$

其中 $d_0 = z_1 - z_0$.

易见，当 $\underset{\sim}{D}(x)=1$ 时，$\underset{\sim}{M}(x)=0$，这表明欲使目标值大于 z_0，必须降低 $\underset{\sim}{D}(x)$. 为了兼顾模糊约束集 $\underset{\sim}{D}$ 与模糊目标集 $\underset{\sim}{M}$，可采用模糊判决 $\underset{\sim}{D}_f = \underset{\sim}{D} \cap \underset{\sim}{M}$，然后选择 x^*，使

$$\underset{\sim}{D}_f(x^*) = (\underset{\sim}{D} \cap \underset{\sim}{M})(x^*) = \bigvee_{x \in X} (\underset{\sim}{D}(x) \wedge \underset{\sim}{M}(x))$$

注意到 $\bigvee_{x \in X} (\underset{\sim}{D}(x) \wedge \underset{\sim}{M}(x))$

$$= \vee \{\lambda \mid \underset{\sim}{D}(x) \geqslant \lambda, \underset{\sim}{M}(x) \geqslant \lambda, \lambda \geqslant 0\}$$

$$= \vee \{\lambda \mid \underset{\sim}{D}_1(x) \geqslant \lambda,\ \underset{\sim}{D}_2(x) \geqslant \lambda,\ \cdots$$

$$\underset{\sim}{D}_m(x) \geqslant \lambda,\ \underset{\sim}{M}(x) \geqslant \lambda,\ \lambda \geqslant 0\}$$

于是问题归结为求普通线性规划问题

$$\begin{cases} \max z = \lambda \\ 1 - \dfrac{1}{d_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) \geqslant \lambda \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ \dfrac{1}{d_0}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j - z_0\right) \geqslant \lambda \\ \lambda \geqslant 0,\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \max z = \lambda \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + d_i\lambda \leqslant b_i + d_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j - d_0\lambda \geqslant z_0 \\ \lambda \geqslant 0,\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.6}$$

若求出式 (9.6) 的最优解为 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, \lambda^*)$，则 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 为式 (9.3) 的最优解，从而式 (9.3) 的最优值为 $z^* = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^*$.

例 9-5 解模糊线性规划

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \lesssim 5 \\ -x_1 + x_2 \lesssim 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \lesssim 21 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

取伸缩指标 $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$.

解　先求解普通线性规划

$$
\begin{cases}
\max z = 2x_1 + x_2 \\
x_1 + x_2 \leqslant 5 \\
-x_1 + x_2 \leqslant 0 \\
6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\
x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0
\end{cases}
\tag{9.7}
$$

引入变量 x_3，x_4，x_5 得标准形为

$$
\begin{cases}
\max z = 2x_1 + x_2 \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad = 5 \\
-x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad = 0 \\
6x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = 21 \\
x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_5 \geqslant 0
\end{cases}
$$

利用单纯形法求解．由于

$$
\begin{array}{c} \\ T_0 = \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 21
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{c} \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -7 \\ \hline
0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{3}{2} \\
0 & \frac{4}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{7}{2} \\
1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{2}
\end{array}\right) = T_1
$$

$$
\Rightarrow \begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{31}{4} \\
\hline
0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\
0 & 0 & -2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{11}{4}
\end{array}\right) = T_2
$$

T_2 中检验数全部非正，已达最优，故式（9.7）的最优解为 $x^{(0)} = (11/4,\ 9/4)^T$，最优值 $z_0 = 31/4 = 7.75$.

同样用单纯形法可得普通线性规划

$$
\begin{cases}
\max z = 2x_1 + x_2 \\
x_1 + x_2 \leqslant 5 + 1 \\
-x_1 + x_2 \leqslant 0 + 2 \\
6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 + 3 \\
x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0
\end{cases}
$$

的最优解 $x^{(1)} = (3,\ 3)^{\mathrm{T}}$，最优值 $z_1 = 9$；线性规划

$$
\begin{cases}
\max z = \lambda \\
x_1 + x_2 + \lambda \leqslant 5 + 1 \\
-x_1 + x_2 + 2\lambda \leqslant 0 + 2 \\
6x_1 + 2x_2 + 3\lambda \leqslant 21 + 3 \\
2x_1 + x_2 - 1.25\lambda \geqslant \frac{31}{4} \\
\lambda \geqslant 0,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0
\end{cases}
$$

的最优解为 $(x_1^*,\ x_2^*,\ \lambda^*)^{\mathrm{T}} = (23/8,\ 21/8,\ 1/2)^{\mathrm{T}}$. 从而得到所求模糊线性规划的最优解 $x^* = (23/8,\ 21/8)^{\mathrm{T}}$，最优值 $z^* = 2x_1^* + x_2^* = 67/8$.

9.3.2 模糊线性规划的参数规划法

所谓参数规划法是将式（9.3）所表达的模糊线性规划化为如下的参数规划：

$$L(\theta):\begin{cases}\max z = cx \\ Ax \leqslant b + \theta d \\ x \geqslant 0\end{cases} \tag{9.8}$$

其中$\theta \in [0,1]$为参数，表示对限制条件$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$在偏离范围$d = (d_1, d_2, \cdots, d_m)^T$内的偏离程度.

对每个$\theta \in [0,1]$，$L(\theta)$的每个最优解

$$x(\theta) = (x_1(\theta), \cdots, x_n(\theta))$$

都满足：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(\theta) \leqslant b_i + \theta d_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

代入式（9.2），有

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{D}_i(x(\theta)) &\geqslant 1 + \frac{b_i}{d_i} - \frac{1}{d_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(\theta) \\ &\geqslant 1 + \frac{b_i}{d_i} - \frac{1}{d_i}(b_i + \theta d_i) \\ &= 1 - \theta, \qquad i = 1, 2, \cdots, m\end{aligned}$$

然而$L(\theta)$是线性规划，其最优解必在限制集的顶点取得，因此，存在某个$i_0 \in \{1, 2, \cdots, m\}$，使

$$\underset{\sim}{D}_{i_0}(x(\theta)) = 1 - \theta$$

因此，

$$\underset{\sim}{D}(x(\theta)) = \bigwedge_{i=1}^{m} D_i(x(\theta)) = 1 - \theta$$

实际上，不难验证$x(\theta)$恰是目标函数cx在$D_{1-\theta}$限制下的最优解.

由参数规划的结果，$L(\theta)$的最优使Z_θ是θ的连续的分段线性

的凹函数. 因此易得 $\underset{\sim}{M}(x(\theta))$ 及

$$\underset{\sim}{M}(x(\theta)) \wedge \underset{\sim}{D}(x(\theta))$$

也是 θ 的连续分段线性的凹函数. 求 $\theta^* \in [0,1]$,使

$$\underset{\sim}{D}_f(x(\theta^*)) = \bigvee_{0\leqslant\theta\leqslant1} [\underset{\sim}{M}(x(\theta)) \wedge \underset{\sim}{D}(x(\theta))]$$

$x(\theta^*)$ 即为式(9.3) 的最优解, θ^* 称为最优点.

求最优点 θ^* 就是求 $\mu = \underset{\sim}{M}(x(\theta))$ 与 $\mu = 1-\theta$ 的交点. 有如下结论:

定理 9-1 $\theta^* \leqslant \frac{1}{2}$, 即 $\lambda^* = 1-\theta^* \geqslant \frac{1}{2}$.

定理 9-2 设 B 是式(9.4) 的标准型的最优基,则 $x^{(0)}$, $x^{(1)}$ 分别是式 (9.4) , 式(9.5) 的最优解.

(1) 若 $B^{-1}(b+d) \geqslant 0$, 则 $\theta^* = \frac{1}{2}$, 且式 (9.3) 的最优解和最优值分别为

$$x^* = \frac{1}{2}[x^{(0)} + x^{(1)}],\ z^* = \frac{1}{2}(z_0 + z_1)$$

(2) 若 $B^{-1}(b + \frac{1}{2}d) \geqslant 0$, 则

$$\theta^* = \frac{1}{1 + 2\underset{\sim}{M}\left(x\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$

利用以上结果可简化某些模糊线性规划问题的求解过程, 如例9-5 中

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

因为

$$B^{-1}(b+d) = B^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

所以 $x^{(1)} = (3, 3)^{\mathrm{T}}$, $z_1 = 9$，由定理9-2（1）立即可得：

$$x^* = \frac{1}{2}(x^{(0)} + x^{(1)}) = \left(\frac{23}{8}, \frac{21}{8}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$z^* = \frac{1}{2}(z_0 + z_1) = \frac{67}{8}$$

9.4 多目标线性规划

9.4.1 多目标线性规划的模糊最优解

经典多目标线性规划有着一个以上的目标函数，均为线性函数式，其数学模型可表示为：

$$\max\begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ z_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n \end{cases}$$

约束条件为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ \qquad\qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.9}$$

记 $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$, $C = \left(c_{ij}\right)_{r \times n}$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \quad z = (z_1, z_2, \cdots, z_r)^T$$

则上述多目标线性规划可用矩阵形式简记为：

$$\max z = Cx$$

结束条件为：

$$\begin{cases} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

由于目标函数不止一个，要想在某个点使所有的目标函数均达到各自的最大值一般是不可能的，因此需要采取折衷方案，使各个目标函数都尽可能地大. 为此，可以将目标函数模糊化，用模糊数学的方法来处理. 处理的方法是：

先求各个单目标 z_i，$i=1, 2, \cdots, r$，在约束条件 $Ax \leqslant b$，$x \geqslant 0$下的最大值 z_i^*：

$$z_i^* = \max\{z_i \mid z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j, Ax \leqslant b, x \geqslant 0\} \quad i = 1,2,\cdots,r$$

这是单目标经典线性规划问题.

每个目标 z_i，$i=1, 2, \cdots, r$ 给出伸缩指标 d_i，$d_i > 0$，越是重要的目标，其伸缩指标应越小. 这样就可以把各个目标模糊化，对目标 z_i 构造一个模糊目标 $\underset{\sim}{M}_i$，其隶属函数定义为：

$$\underset{\sim}{M}_i(x) = g_i(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j)$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j < z_i^* - d_i \\ 1 - \frac{1}{d_i}(z_i^* - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j) & , \quad z_i^* - d_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j < z_i^* \\ 1 & , \quad z_i^* \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \end{cases} \tag{9.10}$$

$$i = 1, 2, \cdots, r$$

记 $\underset{\sim}{M} = \bigcap_{i=1}^{r} \underset{\sim}{M}_i$，称 $\underset{\sim}{M}$ 为多目标线性规划问题的模糊目标. 记 $D = \{x \mid Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$，$D$ 是经典集合，为满足约束条件的可能解集合，或称可行解域. 于是我们可以用模糊判决来求出多目标经典线性规划的模糊最优解.

模糊判决为 $\underset{\sim}{D}_f = D \cap \underset{\sim}{M}$，称满足

$$\underset{\sim}{D}_f(x^*) = \max_{x \geqslant 0}(D(x) \wedge \underset{\sim}{M}(x)) = \max_{x \in D} \underset{\sim}{M}(x)$$

的 x^* 为模糊最优解. 可见，模糊最优解 x^* 就是 $\underset{\sim}{M}(x)$ 在可行解域 D 上的最大值点.

上述问题也可转化成求解普通线性规划问题. 令

$$\lambda = \underset{\sim}{M}(x) = \bigwedge_{i=1}^{r} \underset{\sim}{M}_i(x)$$

那么求解多目标经典线性规划的模糊最优解的问题就可转化为

$$\begin{cases} \max z = \lambda \\ 1 - \dfrac{1}{d_i}(z_i^* - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j) \geqslant \lambda, & i = 1,2,\cdots,r \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \leqslant b_k \quad , & k = 1,2,\cdots,m \\ \lambda \geqslant 0, x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \max z = \lambda \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j - d_i\lambda \geqslant z_i^* - d_i, & i = 1,2,\cdots,r \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \leqslant b_k \quad , & k = 1,2,\cdots,m \\ \lambda \geqslant 0, x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.11}$$

这是一个普通线性规划问题. 求解式（9.11）得最优解 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, \lambda^*)$，$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 为多目标线性规

划式（9.9）的模糊最优解．$Z^{**}=cx^{*}$为目标的最优值．

9.4.2 约束条件有伸缩性的多目标模糊线性规划问题

约束条件有伸缩性的多目标模糊线性规划问题模型为：

$$\max\begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ z_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n \end{cases}$$

约束条件为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \lessapprox b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \lessapprox b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \lessapprox b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.12}$$

设$C=\left(c_{ij}\right)_{r\times n}$，$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$b=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m)^{\mathrm{T}}$，$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$，$z=(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_r)^{\mathrm{T}}$，则式（9.12）的模糊线性规划问题可用矩阵形式简记为

$$\begin{cases} \max z = Cx \\ Ax \lessapprox b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

我们可以用有伸缩性的单目标模糊线性规划的解法及多目标线性规划的解法来解这一问题．

在约束条件$Ax\leqslant b$，$x\geqslant 0$的情况下，用普通多目标线性规划

问题的方法构造模糊目标集 $\underset{\sim}{M}=\bigcap_{i=1}^{r}\underset{\sim}{M}_i$，$\underset{\sim}{M}_i$ 的隶属函数见式(9.10).

根据每个有伸缩性的约束条件的重要性，给定一个伸缩指标 d_j，$j=1，2，\cdots，m$，按照9.3节采用的方法构造模糊约束集 $\underset{\sim}{D}=\bigcap_{j=1}^{m}\underset{\sim}{D}_j$，$\underset{\sim}{D}_j$ 的隶属函数见式 (9.2).

模糊判决：$\underset{\sim}{D}_f=\underset{\sim}{D}\cap\underset{\sim}{M}$

最优解 x^*：满足

$$\underset{\sim}{D}_f(x^*)=\max_{x\geq 0}(\underset{\sim}{D}(x)\wedge\underset{\sim}{M}(x))$$

求 x^* 的问题可以转化为求解下述普通线性规划问题：

$$\begin{cases}\max z=\lambda \\ \underset{\sim}{M}(x)\geqslant\lambda, \quad i=1,2,\cdots,r \\ \underset{\sim}{D}_k(x)\geqslant\lambda, \quad k=1,2,\cdots,m \\ \lambda\geqslant 0, x\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\max z=\lambda \\ \sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j-l_i\lambda\geqslant z_i^*-l_i, \quad i=1,2,\cdots,r \\ \sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j+d_k\lambda\leqslant b_k+d_k, \quad k=1,2,\cdots,m \\ \lambda\geqslant 0, x_1, x_2, \cdots, x_n\geqslant 0\end{cases} \tag{9.13}$$

式中 l_i 和 d_k 分别为目标函数和约束条件的伸缩指标.

9.5 有模糊系数的线性规划

当线性规划问题有模糊系数时，模糊系数可以出现在约束条

件的系数中，也可以出现在目标函数的系数中.

9.5.1 约束条件系数为 *L-R* 模糊数的模糊线性规划

约束条件系数为 *L-R* 模糊数的模糊线性规划问题的数学模型为：

$$\max\begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ z_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n \end{cases}$$

约束条件为：

$$\begin{cases} \underset{\sim}{a}_{11}x_1 + \underset{\sim}{a}_{12}x_2 + \cdots + \underset{\sim}{a}_{1n}x_n \leqslant \underset{\sim}{b}_1 \\ \underset{\sim}{a}_{21}x_1 + \underset{\sim}{a}_{22}x_2 + \cdots + \underset{\sim}{a}_{2n}x_n \leqslant \underset{\sim}{b}_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \underset{\sim}{a}_{m1}x_1 + \underset{\sim}{a}_{m2}x_2 + \cdots + \underset{\sim}{a}_{mn}x_n \leqslant \underset{\sim}{b}_m \\ \qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.14}$$

式中，$\underset{\sim}{a}_{ij}$，$\underset{\sim}{b}_i$，$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$ 均为 *L-R* 模糊数.

令 $\underset{\sim}{A} = \left(\underset{\sim}{a}_{ij}\right)_{m\times n}$，$C = \left(c_{ij}\right)_{r\times n}$，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$\underset{\sim}{b} = (\underset{\sim}{b}_1, \underset{\sim}{b}_2, \cdots, \underset{\sim}{b}_m)^T$，$z=(z_1, z_2, \cdots, z_r)^T$，则式（9.14）可简记为：

$$\begin{cases} \max z = Cx \\ \underset{\sim}{A}x \leqslant \underset{\sim}{b} \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

设 $\underset{\sim}{a}_{ij}$和 $\underset{\sim}{b}_i$ 分别表示为

$$\underset{\sim}{a}_{ij} = (a_{ij}; \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij})_{LR} \qquad \underset{\sim}{b}_i = (b_i; \overline{b}_i, \underline{b}_i)_{LR}$$

普通实数认为是左右展形均为0的特殊 L-R 模糊数，如实数 $m=(m;\ 0,\ 0)_{LR}$.

由 L-R 模糊数的运算（见第5章），并注意到 $x_j \geqslant 0$，$j=1,2,\cdots,n$，于是 $\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_{ij}x_j$ 也是 L-R 模糊数,且有：

$$\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_{ij}x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j ; \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}x_j , \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}x_j \right)_{LR}$$

于是式（9.14）的约束条件可表示为：

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j ; \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}x_j , \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}x_j \right)_{LR} \leqslant (b_i ; \underline{b}_i , \bar{b}_i)_{LR} \quad (9.15)$$

由 L-R 模糊数性质

$$\underset{\sim}{m} \leqslant \underset{\sim}{n} \Leftrightarrow m \leqslant n,\ \alpha \geqslant \gamma,\ \beta \leqslant \delta$$

其中

$$\underset{\sim}{m} = (m;\alpha,\beta)_{LR}, \quad \underset{\sim}{n} = (n;\gamma,\delta)_{LR}$$

故式（9.15）可表示为三个等价的式子：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}x_j \geqslant \underline{b}_i,\ \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}x_{ij} \leqslant \bar{b}_i$$

这样，约束条件系数为 L-R 模糊数的模糊线性规划问题（式(9.14)），可以转化为下述有 $3m$ 个约束条件的多目标普通线性规划问题：

$$\begin{cases} \max z_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \leqslant b_i \\ \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{kj}x_j \geqslant \underline{b}_i \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj}x_j \leqslant \bar{b}_i \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

式中，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ r$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$.

例 9-6 某人外出，需要携带两样货物，货物甲每包重"6 斤可能多一点"（可用 $\underset{\sim}{6}=(6,0,1)_{LR}$表示），价值 20 元；货物乙每包重"大约 2 斤"（可用 $\underset{\sim}{2}=(2,1,1)_{LR}$表示），价值 10 元. 此人希望一次最多拿"21 斤左右"（可用$\underset{\sim}{21}=(21,1,5)_{LR}$表示），并且希望拿的货物总价值最大.

解 设他拿货物甲 x_1 包，乙 x_2 包. 则问题归结为解如下约束带有模糊系数的线性规划问题

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\text{s. t}: \underset{\sim}{6}\,x_1 + \underset{\sim}{2}\,x_2 \leqslant \underset{\sim}{21}\,,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

可以演变为解普通线性规划问题：

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\text{s. t}: 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21$$

$$x_2 \geqslant 1$$

$$x_1 + x_2 \leqslant 5$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

最佳点为 $x_1^* = \dfrac{11}{4}$，$x_2^* = \dfrac{9}{4}$，最优值 $z^* = \dfrac{310}{4} = 77.5$.

如果允许将货物包拆开，则此人可携带货物甲 $2\dfrac{3}{4}$包，乙 $2\dfrac{1}{4}$包，总价值达 77.5 元. 如果货物必须拿整包，则需限制 x_1，x_2 取整数，也即用整数规划方法求解. 结果应取货物甲 2 包，乙 3 包（或甲 3 包，乙 1 包），总价值达 70 元.

9.5.2 目标函数系数为 *L-R* 模糊数的模糊线性规划

考察如下模糊线性规划问题

$$\begin{cases} \widetilde{\max} & \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{C}x \\ \text{s.t} & Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.16}$$

取 $\underset{\sim}{C} = (\underset{\sim}{c}_1, \underset{\sim}{c}_2, \cdots, \underset{\sim}{c}_n)^T$，$\underset{\sim}{c}_i = (c_i; \underline{c}_i, \overline{c}_i)_{LR}$ 为 L-R 数，$\underset{\sim}{z} = (z; \underline{z}, \overline{z})_{LR} = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i; \sum_{i=1}^{n} \underline{c}_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i x_i\right)_{LR}$. 根据$\widetilde{\max}$的近似公式，式（9.16）可近似等价于一个具有三个目标的线性规划问题

$$\begin{cases} \max & z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = Cx \\ \min & \underline{z} = \sum_{i=1}^{n} \underline{c}_i x_i = \underline{C}x \\ \max & \overline{z} = \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i x_i = \overline{C}x \\ \text{s.t} & Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

例 9-7 解如下模糊线性规划问题

$$\widetilde{\max}\ \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{20}\, x_1 + \underset{\sim}{10}\, x_2$$

$$\text{s.t:}\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

其中 $\underset{\sim}{20} = (20;\ 3,\ 4)_{LR}$，$\underset{\sim}{10} = (10;\ 2,\ 1)_{LR}$.

此问题近似等价于如下问题

$$\max\ z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\min\ \underline{z} = 3x_1 + 2x_2$$

$$\max\ \overline{z} = 4x_1 + x_2$$

$$\text{s.t:}\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

分别对每个目标求出最优解

$x_1^{(1)} = 0$，$x_2^{(1)} = 10.5$，$z = 105$. 此时 $\underline{z} = 21$，$\overline{z} = 10.5$.

$x_1^{(2)} = 0$，$x_2^{(2)} = 0$，$\underline{z} = 0$. 此时 $\overline{z} = 0$，$z = 0$.

$x_1^{(3)} = 3.5$, $x_2^{(3)} = 0$, $\bar{z} = 14$. 此时 $z = 70$, $\underline{z} = 10.5$,
主观给出伸缩指标 $d_1 = 5$, $d_2 = 20$, $d_3 = 4$. 构造三个模糊目标集 $\underset{\sim}{M}_1$, $\underset{\sim}{M}_2$, $\underset{\sim}{M}_3$.

$$\underset{\sim}{M}_1(x) = g_1(20x_1 + 10x_2)$$

$$= \begin{cases} 0 & 20x_1 + 10x_2 < 100 \\ 1 - \frac{1}{5}(105 - 20x_1 - 10x_2) & 100 \leqslant 20x_1 + 10x_2 < 105 \\ 1 & 20x_1 + 10x_2 \geqslant 105 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{M}_2(x) = g_2(3x_1 + 2x_2)$$

$$= \begin{cases} 0 & 3x_1 + 2x_2 > 20 \\ 1 - \frac{1}{20}(3x_1 + 2x_2) & 0 \leqslant 3x_1 + 2x_2 \leqslant 20 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{M}_3(x) = g_3(4x_1 + x_2)$$

$$= \begin{cases} 0 & 4x_1 + x_2 < 10 \\ 1 - \frac{1}{4}(14 - 4x_1 - x_2) & 10 \leqslant 4x_1 + x_2 < 14 \\ 1 & 4x_1 + x_2 \geqslant 14 \end{cases}$$

令 $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}_1 \cap \underset{\sim}{M}_2 \cap \underset{\sim}{M}_3$, 问题化为普通线性规划

$$\max \lambda$$

$$\text{s.t:} 1 - \frac{1}{5}(105 - 20x_1 - 10x_2) \geqslant \lambda$$

$$1 - \frac{1}{20}(3x_1 + 2x_2) \geqslant \lambda$$

$$1 - \frac{1}{4}(14 - 4x_1 - x_2) \geqslant \lambda$$

$$6x_1 + 2x_2 \leqslant 21$$

$$\lambda \leqslant 1$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

即 $$\max \lambda$$

$$\text{s.t:}\ 20x_1 + 10x_2 - 5\lambda \geqslant 100$$
$$3x_1 + 2x_2 + 20\lambda \leqslant 20$$
$$4x_1 + x_2 - 4\lambda \geqslant 10$$
$$6x_1 + 2x_2 \leqslant 21$$
$$\lambda \leqslant 1$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

解得最优解 $x_1^* = 0.488$，$x_2^* = 9.035$，$\lambda^* = 0.022$. 相应地有 $z^* = 100.11$；$\underset{\sim}{z}^* = 19.534$，$\bar{z}^* = 10.987$. 于是近似的模糊最优值为 $\underset{\sim}{z}^* = (100.11;\ 19.534,\ 10.987)_{LR}$.

注意：在主观给出伸缩指标 d_1，d_2，d_3 后，可能导出线性规划问题的约束区域是空集，这时就没有最优解. 这就需要适当调整伸缩指标，以保证最优解存在.

对于目标和约束都带有模糊系数的线性规划问题，利用前面方法，也可化为一个多目标线性规划问题的模糊最优解问题.

习 题 9

1. 设函数 $f(x) = 10e^{-\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}}$，模糊约束集为 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}(x) = e^{-\frac{(x-a_2)^2}{\sigma_2^2}}$，求 f 在 $\underset{\sim}{A}$ 约束下的极大点.

2. 设 $f(x) = -x^2$，$\underset{\sim}{A}(x) = 1 - x, 0 \leqslant x \leqslant 1$，求 $f(x)$ 在 $\underset{\sim}{A}$ 约束下的极小值.

3. 甲机械每月最多大约能运行 400 个工时，乙机械每月最多大约能运行 250 个工时. 甲机械每工时耗费（维修、折旧等）3 元，但获净利润 7 元；乙机械每工时耗费 2 元，但获净利润 3 元. 甲、乙两机械每月耗费总和大致不得超过 1500 元. 问如何安排两机械运行可获得最大利润？

4. 解下列模糊线性规划问题

(1)
$$\begin{cases} \max z = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \lesssim 60 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \lesssim 30 \\ 2x_2 + x_3 \lesssim 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

取伸缩指标 $d_1 = 4$，$d_2 = 6$，$d_3 = 2$.

(2)
$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \lesssim 1200 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \lesssim 1550 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

取伸缩指标 $d_1 = 100$，$d_2 = 200$.

5. 解模糊线性规划问题

$$\begin{cases} \max z = x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \lesssim 8 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \lesssim 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

(1) 取伸缩指标 $d_1 = 2$，$d_2 = 8$；

(2) 取伸缩指标 $d_1 = 0$，$d_2 = 15$；

(3) 取伸缩指标 $d_1 = 2$，$d_2 = 30$.

6. 给出多目标线性规划问题

$$\begin{cases} \max z_1 = 2x_1 + x_2 \\ \max z_2 = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

约束条件

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 40 \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 78 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 27 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

求最优解，最优值.

7. 求解题 6 中约束条件有伸缩性的模糊规划问题：$\begin{cases} \max z_1 = 2x_1 + x_2 \\ \max z_2 = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

约束：$\begin{cases} -3x_1+2x_2 \lessapprox 40 \\ 4x_1+3x_2 \lessapprox 78 \\ 3x_1-x_2 \lessapprox 27 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

约束条件的伸缩指标 $d_1=d_2=d_3=5$.

8. 9.3 节中若采用积模糊判决,证明隶属函数 $\underset{\sim}{D}_f(x(\theta))=\underset{\sim}{M}(x(\theta))\cdot\underset{\sim}{D}(x(\theta))$在$[0,1]$上是 θ 的凹函数.

第 10 章　模 糊 预 测

预测是企业生存与发展不可缺少的基础，是制约人类繁荣的一种因素．目前，预测已成为一门新兴的学科．本章着重介绍几种常用的模糊预测方法．

10.1　预测及其程序

10.1.1　预测的概念

预测就是通过调查和分析，对事物的动态和发展趋势，事先作出估计和评价．其实质是利用以往的经验或数据资料认识事物的规律．最终指出事物发展的趋势或事物在未来某时段的状态．

虽然事物的未来发展过程总是由必然性推移和偶然性推移组合而成，但其过程却是连续的，并且具有规律性，这就是我们赖以进行预测的依据．

预测方法大致可以分为两类，一是空间静态类，二是时间动态类．前者试图分析决定某个被预测量的特征因素，给出结构方程，从而通过测量未来某时刻的因素状态得到预测值；后者不管决定因素与变量结构，仅仅通过被预测量的历史数据总结出依时间推移的变动规律，从而预测该量在未来时刻的状态．

由于事物运动的趋势不仅决定于它的历史，还要受到当前环境变动的影响；况且历史数据又往往不尽全面还带有模糊性，这就给预测工作带来一定的困难．人们为使预测更加可靠，一方面研究对历史数据的加工提炼手段，另一方面还充分运用丰富的经验，这正好是模模集理论的“专长”，从而就产生了模糊预测方法．

10.1.2 预测的程序

预测的一般程序如下：

（1）**明确目的** 根据当前行动的内容、性质和规律以及它所要达到的目标来确定预测目的.

（2）**分析信息** 对收集到的信息，包括历史的、现在的、定性的描述和定量的数据，认真分析研究，找出其内在联系.

（3）**选择方法** 根据预测的目的和占有的信息，选择适当的预测方法.

（4）**进行预测** 根据选定的方法进行预测.

（5）**评价结果** 对预测结果予以估计和评价. 如果能够进行实际验证，那么一定要分析预测的误差. 一般情况下，由于未来尚无确定的信息可寻，因此这种误差的分析只能在有限的范围内进行或根据各种经验加以估计.

需要指出，实际问题中要预测的事物一般来说都是十分复杂的. 在预测时，应采用多种方法，从不同角度进行预测，然后再对结果进行比较、评价，找出主导性的预测判断. 这较之依据单独一种预测作出的判断通常比较全面和可靠些.

10.2 基于因果聚类的模糊预测

设 α 为要预测的量. 而量 α 的预测问题，则可以用三元结构$(X, \mathscr{P}_0(Y), \varphi)$来描述，其中 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 是 n 元 Descartes 乘积，而 X_1，X_2，…，X_n 均为实数集，称为状态空间，它们分别是 α 的 n 个因素 f_1，f_2，…，f_n 的取值范围. Y 也为实数集是 α 的取值范围，称为预测空间；而 $\mathscr{P}_0(Y)$ 为 Y 的非空幂集，φ 为 X 到 $\mathscr{P}_0(Y)$的映射，即

$$\varphi: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to \mathscr{P}_0(Y)$$

表示对给定的因素状态$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，与之相对应的 α 是 Y 中一个非空子集合，有时 φ 的取值退化为一个单点集，即

$$\varphi: \quad X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$$

通俗地讲，量 α 的预测问题，就是在已知因素状态(x_1, x_2, …, x_n)的情况下，通过 φ 来求得 α 的估计值. 但在实际问题中要搞清 φ 的结构和表达式往往是十分困难的，有时也是不必要的，因此我们一般不去直接研究 φ 的具体形式，而是应用模糊因果聚类和模式识别的手段，由因素状态(x_1, x_2, …, x_n)去推测 α 的取值，从而作出预测，这是经验的一种运用方法.

设有 T 期历史数据(x_t, y_t)($t=1$, 2, …, T)，其中

$$x_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \cdots, x_t^{(n)}) \in X, \quad y_t \in Y$$

基于因果聚类进行模糊预测的步骤如下：

（1）模糊因果聚类 记 $z_t=(x_t, y_t)$($t=1$, 2, …, T)，利用第 7 章介绍的模糊聚类方法，求出 z_1, z_2, …, z_T 的最佳聚类. 不妨设最佳聚类为

$$U_1, U_2, \cdots, U_m$$

（2）建立特征模糊集 令

$$V_i = \{x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_{k_i}}\} \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

其中(x_{t_s}, y_{t_s})$=z_{t_s} \in U_i$($s=1$, 2, …, k_i)，即 V_i 是 U_i 向因素轴 X 的投影. 计算

$$\bar{x}_i = \frac{1}{k_i}\sum_{s=1}^{k_i} x_{t_s} = (\bar{x}_i^{(1)}, \bar{x}_i^{(2)}, \cdots, \bar{x}_i^{(n)}) \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{k_i}\sum_{s=1}^{k_i} (x_{t_s}^{(j)} - \bar{x}_i^{(j)})^2 \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

对于 $x=$ (x_1, x_2, …, x_n) $\in X$，令

$$\underset{\sim}{P}_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j e^{-\frac{(x_j-\bar{x}_i^{(j)})^2}{9\sigma_{ij}^2}} \qquad (i = 1,2,\cdots,m)$$

其中（ω_1，ω_2，…，ω_n）是一组取定的权重，而模糊集 $\underset{\sim}{P}_i \in \mathscr{F}(X)$就是类 U_i 的特征．再令

$$W_i = \{y_{t_1}, y_{t_2}, \cdots, y_{t_{k_i}}\} \qquad (i = 1,2,\cdots,m)$$

其中$(x_{t_s},\ y_{t_s}) = z_{t_s} \in U_i(s=1,\ 2,\ \cdots,\ k_i)$，即 W_i 是 U_i 向预测轴的投影．计算

$$\bar{y}_i = \frac{1}{k_i}\sum_{s=1}^{k_i} y_{t_s}$$

并求

$$\delta_i = \max_{1\leq s\leq k_i}\left| y_{t_s} - \bar{y}_i \right|$$

最后构造以$(\bar{y}_i,\ 3\delta_i)$为参数的三角模糊数（或正态模糊数）$\underset{\sim}{I}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$．

于是对应于分类$\{U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_m\}$，有

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{P}_1 & \underset{\sim}{P}_2 & \cdots & \underset{\sim}{P}_m \\ \underset{\sim}{I}_1 & \underset{\sim}{I}_2 & \cdots & \underset{\sim}{I}_m \end{pmatrix}$$

（3）进行预测　假定对第 s 期$(s>T)$的 α 进行预测，分两种情况考虑：

①如果第 s 期的因素状态是一个确定的点 $x_s \in X$，那么，对 x_s 和$\{\underset{\sim}{P}_1,\ \underset{\sim}{P}_2,\ \cdots,\ \underset{\sim}{P}_m\}$应用“最大隶属原则”，选出 $\underset{\sim}{P}_{i_0}$，然后以相应的 I_{i_0}作为 α 在第 s 期的模糊预测值$(i_0 \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\})$．

②如果第 s 期的因素状态为一个模糊集 $\underset{\sim}{B}_s \in \mathscr{F}(X)$，那么，对 $\underset{\sim}{B}_s$ 和$\{\underset{\sim}{P}_1,\ \underset{\sim}{P}_2,\ \cdots,\ \underset{\sim}{P}_m\}$应用“择近原则”，选出 $\underset{\sim}{P}_{i_0}$，并以相应的 $\underset{\sim}{I}_{i_0}$作为 α 在第 s 期的模糊预测值$(i_0 \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\})$．

例 10-1　设甲乙丙为影响某产品的三个因素，现已知三因素及利润指标的七期历史数据（见表 10-1）．

表 10-1　历史数据

时　期	甲 (x_{t_1})	乙 (x_{t_2})	丙 (x_{t_3})	利润 (y_t)
1	0.0592	1.1271	19.610	0.047
2	0.0802	1.1805	19.360	0.353
3	0.0681	1.5631	45.060	0.560
4	0.0848	1.3787	46.755	0.688
5	0.1126	1.7095	94.029	1.285
6	0.1380	1.9596	96.560	1.796
7	0.1171	1.9956	99.046	1.750

如果甲乙丙的指标分别为 $x_1=0.1120$，$x_2=1.7040$，$x_3=93.0210$ 时，问此时利润指标估计为多少？

解　记 $z_t=(x_t,\ y_t)$　$(t=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$，其中 $x_t=(x_{t_1},\ x_{t_2},\ x_{t_3})$．由模糊聚类分析，经计算，得 $z_t(t=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ 的最佳聚类为

$$U_1=\{z_1,z_2\},\quad U_2=\{z_3,z_4\},\quad U_3=\{z_5,z_6,z_7\}.$$

由于 $\bar{x}_1=(0.0697,\ 1.1538,\ 19.485)$，$\bar{x}_2=(0.0765,\ 1.4709,\ 45.908)$，$\bar{x}_3=(0.1226,\ 1.8882,\ 96.545)$.

$\sigma_{11}^2=0.0001$，$\sigma_{12}^2=0.0007$，$\sigma_{13}^2=0.0156$，

$\sigma_{21}^2=0.0001$，$\sigma_{22}^2=0.0085$，$\sigma_{23}^2=0.7191$，

$\sigma_{31}^2=0.0001$，$\sigma_{32}^2=0.0162$，$\sigma_{33}^2=4.195$.

若取 $(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)=(0.5,\ 0.2,\ 0.3)$，则各类的特征模糊集分别为

$$\underset{\sim}{P}_1(x)=0.5\mathrm{e}^{-\frac{(x_1-0.0697)^2}{0.0009}}+0.2\mathrm{e}^{-\frac{(x_2-1.1538)^2}{0.0063}}$$

$$+0.3\mathrm{e}^{-\frac{(x_3-45.908)^2}{0.1404}}$$

$$\underset{\sim}{P}_2(x)=0.5\mathrm{e}^{-\frac{(x_1-0.0765)^2}{0.0009}}+0.2\mathrm{e}^{-\frac{(x_2-1.4709)^2}{0.0765}}$$

$$+0.3\mathrm{e}^{-\frac{(x_3-45.908)^2}{6.4719}}$$

$$
\underset{\sim}{P}_3(x) = 0.5e^{-\frac{(x_1-0.1226)^2}{0.0009}} + 0.2e^{-\frac{(x_2-1.8882)^2}{0.1458}} + 0.3e^{-\frac{(x_3-96.545)^2}{37.755}}
$$

又因为　　　　$\overline{y}_1 = 0.2$，$\overline{y}_2 = 0.624$，$\overline{y}_3 = 1.610$，

所以有　　　　$\delta_1 = 0.153$，$\delta_2 = 0.064$，$\delta_3 = 0.325$.

构造以$(\overline{y}_i, 3\delta_i)(i=1, 2, 3)$为参数的三角模糊数

$$
\underset{\sim}{I}_1 = \begin{cases} \dfrac{y}{0.459} + 0.564, & -0.259 \leqslant y \leqslant 0.200 \\ \dfrac{-y}{0.459} + 1.435, & 0.200 < y \leqslant 0.659 \end{cases}
$$

$$
\underset{\sim}{I}_2 = \begin{cases} \dfrac{y}{0.192} - 2.25, & 0.432 \leqslant y \leqslant 0.624 \\ \dfrac{-y}{0.192} + 4.25, & 0.624 < y \leqslant 0.816 \end{cases}
$$

$$
\underset{\sim}{I}_3 = \begin{cases} \dfrac{y}{0.975} - 0.651, & 0.635 \leqslant y \leqslant 1.610 \\ \dfrac{-y}{0.975} + 2.651, & 1.610 < y \leqslant 2.585 \end{cases}
$$

当 $x_1 = 0.1120$，$x_2 = 1.7040$，$x_3 = 93.210$ 时，经计算得

$$
\underset{\sim}{P}_1(x) = 0.0956, \underset{\sim}{P}_2(x) = 0.2216, \underset{\sim}{P}_3(x) = 0.8376
$$

故由最大隶属原则，应选 $\underset{\sim}{I}_3$ 作为模糊预测，即利润指标估计在 0.635～2.585 之间，1.610 的可能性最大.

10.3　模糊时间序列预测法

本节介绍模糊时间序列预测法，该方法适合解决带有模糊信息的动态预测问题.

10.3.1 普通时间序列预测法

普通时间序列的基本模型是

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k + \varepsilon$$

其中 y 表示预测量值($k \in N$)，$a_i(i=0, 1, \cdots, k)$为待定实数，ε 是一个随机误差，满足 $E[\varepsilon]=0$，若除去随机干扰 ε，y 可看作时间 t 的多项式.

如果有 T 期历史数据

$$(1,y_1),(2,y_2),\cdots,(T,y_T)$$

那么，通过线性回归可对未知参数

$$a_0,a_1,\cdots,a_k$$

进行估计，并进行其他有关的统计检验，设最后得到的回归函数为

$$\hat{y}(t) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \cdots + \hat{a}_k t^k \qquad (10.1)$$

其中 $\hat{a}_i$ 是 a_i 的估计值($i=0, 1, \cdots, k$). 于是由式 (10.1) 便可预测某时期的 y 的值.

时间序列预测法的特点是仅仅利用 y 本身的历史数据，去构造 y 随时间变化的趋势的表达式，而不去分析影响 y 的其他因素.

10.3.2 模糊时间序列预测法

模糊时间序列的基本模型是

$$\underset{\sim}{Y}(t) = \underset{\sim}{P}_0 + \underset{\sim}{P}_1 t + \underset{\sim}{P}_2 t^2 + \cdots + \underset{\sim}{P}_k t^k + \varepsilon \qquad (10.2)$$

其中 $\underset{\sim}{Y}(t)$表示待预测的模糊量($k \in N$)，$\underset{\sim}{P}_i$ 为有界闭模糊数($i=0,1, 2, \cdots, k$)，ε 是随机误差，满足 $E(\varepsilon)=0$.

约定 $\underset{\sim}{P}_i t^i = t^i \cdot \underset{\sim}{P}_i$

我们的任务是根据历史数据确定式 (10.2) 的次数 k 和所有模糊系数 $\underset{\sim}{P}_i$ ($i=0, 1, \cdots, k$)，从而由式 (10.2) 便可进

行预测. 具体步骤如下:

(1) **获取模糊数据** 如果历史数据本身就是模糊数

$$\underset{\sim}{Y}_1, \underset{\sim}{Y}_2, \cdots, \underset{\sim}{Y}_T$$

那么可以直接使用.

如果历史数据是一组实数

$$x_1, x_2, \cdots, x_T$$

那么, 需从这些数据出发构造一组模糊数. 可用如下两种方法构造模糊数.

方法① 令

$$u_t = \max\{x_{t-1}, x_t, x_{t+1}\}$$
$$v_t = \min\{x_{t-1}, x_t, x_{t+1}\} \quad (t = 2, 3, \cdots, T-1)$$

而 $u_1 = \max\{x_1, x_2\}, \quad v_1 = \min\{x_1, x_2\}$

$$u_T = \max\{x_{T-1}, x_T\}, \quad v_T = \min\{x_{T-1}, x_T\}$$

再令

$$\underset{\sim}{Y}_t(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - \alpha_t|}{c_t}, & v_t \leqslant x \leqslant u_t \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $c_t = (u_t - v_t)/2$, $\alpha_t = (u_t + v_t)/2 (t = 1, 2, \cdots, T)$, 即 $\underset{\sim}{Y}_t$ 是以参数为 (α_t, c_t) 的三角模糊数. 这里假定 $u_t > v_t$, 且假设第 t 期的数据受到前后各一期数据的影响.

方法② 令

$$\underset{\sim}{Y}_t(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - x_t|}{\sigma}, & x_t - \sigma \leqslant x \leqslant x_t + \sigma \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 σ 为固定正实数.

(2) **确定多项式次数** 多项式的次数 k 也称为模糊时间序列的长度, 确定其值有两条途径:

①作出 α_t 或 $x_t (t = 1, 2, \cdots, T)$ 的散点图 (见图 10-1), 然后用折线连结, 将 k 取为折线尖点个数加 1. 例如图 10-1 中折线

有三个尖点，故 k 取为4.

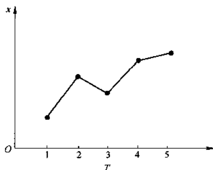


图 10-1　k 的确定

②将 k 取若干不同的自然数，相应于每个 k 求出式（10.2）的回归函数

$$\underset{\sim}{Y}^*(t) = \hat{\underset{\sim}{P}}_0 + \hat{\underset{\sim}{P}}_1 t + \cdots + \hat{\underset{\sim}{P}}_k t^k$$

其中 $\hat{\underset{\sim}{P}}_i$ 是 $\underset{\sim}{P}_i$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ k)$ 的估计值. 然后计算

$$d^* = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} D(\underset{\sim}{Y}_t, \underset{\sim}{Y}^*(t))$$

其中 D 为某个贴近度，d^* 称为拟合度.

选择拟合度最大的 k 作为多项式的次数.

（3）**确定模糊系数的估计值**　假设模糊系数 $\underset{\sim}{P}_i$ 的估计值 $\hat{\underset{\sim}{P}}_i$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ k)$ 为三角模糊数

$$\hat{\underset{\sim}{P}}_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-\beta_i|}{s_i}, & \beta_i - s_i \leqslant x \leqslant \beta_i + s_i \\ 0 \quad\quad\quad\quad , & \text{其他} \end{cases}$$

其中$(\beta_i,\ s_i)(i=0,\ 1,\ \cdots,\ k)$为待确定常数.

确定 $(\beta_i,\ s_i)(i=0,\ 1,\ \cdots,\ k)$ 的准则是使每对 $\underset{\sim}{Y}_t$ 和 $\underset{\sim}{Y}^*(t)$尽可能接近，且回归函数的模糊性也尽可能小.

于是若令 $h_t = D_g(\underset{\sim}{Y}_t, \underset{\sim}{Y}^*(t))(t=0, 1, \cdots, T)$，则确定 $(\beta_i, s_i)(i=0, 1, \cdots, k)$ 的问题成为让每个 h_t 不小于事先给定的 h_0 的前提下，使系统 $\{\underset{\sim}{P}_0, \underset{\sim}{P}_1, \cdots, \underset{\sim}{P}_k\}$ 的模糊度达到最小，即

$$\begin{cases} \min s \\ h_t \geqslant h_0 \end{cases}$$

上式可化为线性规划问题. 由于

$$\underset{\sim}{Y}^*(t) = \hat{\underset{\sim}{P}}_0 + \hat{\underset{\sim}{P}}_1 t + \cdots + \hat{\underset{\sim}{P}}_k t^k$$

故 $\underset{\sim}{Y}^*(t)$ 是参数为$(\sum_{i=0}^{k}\beta_i t^i, \sum_{i=0}^{k} s_i t^i)$ 的三角模糊数，进而

$$h_t = D_g(\underset{\sim}{Y}_t, \underset{\sim}{Y}^*(t)) = 1 - \frac{\left|\alpha_t - \sum_{i=0}^{k}\beta_i t^i\right|}{c_t + \sum_{i=0}^{k} s_i t^i}$$

其中 $t=1, 2, \cdots, T$. 所以 $h_t \geqslant h_0$ $(t=1, 2, \cdots, T)$ 当且仅当

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{k} t^i\beta_i - (1-h_0)\sum_{i=0}^{k} t^i s_i \leqslant \alpha_t + c_t(1-h_0) \\ \sum_{i=0}^{k} t^i\beta_i + (1-h_0)\sum_{i=0}^{k} t^i s_i \geqslant \alpha_t - c_t(1-h_0) \end{cases}$$

于是$(\beta_i, s_i)(i=0, 1, \cdots, k)$由下列线性规划所确定

$$\begin{cases} \min s = \sum_{i=0}^{k}\omega_i s_i \\ \sum_{i=0}^{k} t^i\beta_i - (1-h_0)\sum_{i=0}^{k} t^i s_i \leqslant \alpha_t + c_t(1-h_0) \\ \sum_{i=0}^{k} t^i\beta_i + (1-h_0)\sum_{i=0}^{k} t^i s_i \geqslant \alpha_t - c_t(1-h_0) \\ s_i > 0 \quad (t=1,2,\cdots,T; i=0,1,\cdots,k) \end{cases}$$

解此线性规划，便可得到(β_i, s_i)，从而求出 $\underset{\sim}{P}_i$ 的估计值

$\widehat{\underset{\sim}{P}}_i(i=0,1,\cdots,k)$，于是便可得到式（10.2）的回归函数

$$\underset{\sim}{Y}^*(t) = \widehat{\underset{\sim}{P}}_0 + \widehat{\underset{\sim}{P}}_1 t + \cdots + \widehat{\underset{\sim}{P}}_k t^k \qquad (10.3)$$

并且由此给出的拟合度不低于 h_0.

由式（10.3）便可进行预测. 对于第 $s(s>T)$ 期，预测值 $\underset{\sim}{Y}^*(s)$ 是一个三角模糊数. 当时间 t 变动时，$\underset{\sim}{Y}^*(t)$ 不是一条曲线而是一条"带"（见图 10-2）.

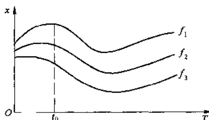


图 10-2　模糊值预测曲线

图中三条曲线自上而下依次为

$$f_1(t) = \beta(t) + s(t)$$
$$f_2(t) = \beta(t)$$
$$f_3(t) = \beta(t) - s(t)$$

其中 $\beta(t)$ 是 $\underset{\sim}{Y}^*(t)$ 的中心值，$s(t)$ 是 $\underset{\sim}{Y}^*(t)$ 的模糊度.

当 $k=1$ 时，基本模型式（10.2）成为线性形式

$$\underset{\sim}{Y}(t) = \underset{\sim}{P}_0 + \underset{\sim}{P}_1 t + \varepsilon \qquad (10.4)$$

例 10-2　模糊时序模型在预测市场销售量方面的应用（参见文献［22］）：

利用线性模型（10.4）预测百货商店的商品销售额. 根据文献［22］提供的数据，由实际情况取 $h_0=0.5$，系统模糊度

$$s = 0.3s_1 + 0.7s_2$$

根据 1973～1976 年各月的销售额估计出 $\underset{\sim}{P}_0$ 和 $\underset{\sim}{P}_1$，经计算

得 $\underset{\sim}{P}_0$ 是以 $(4.57\times10^5,\ 9.90\times10^4)$ 为参数的三角模糊数，$\underset{\sim}{P}_1$ 是以 $(4.41\times10^2,\ 2.37\times10^2)$ 为参数的三角模糊数，且系统模糊度 $s=3.31\times10^4$.

然后由得到的模型预测出 1977 年各月的销售额（见图 10-3）.

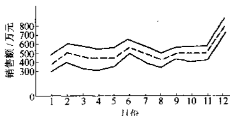


图 10-3　销售额预测范围

10.4　预测问题举例

本节通过两个具体实际例子来说明如何直接应用模糊模式识别和模糊规划来进行预测.

例 10-3　某地有一个接触交待型富铁矿区，该矿与燕山期中性岩浆侵入杂岩有成因联系. 区内广泛出露燕山期中性岩浆岩和奥陶系中统灰岩，石灰二叠纪地层也有一定出露，且构造断裂和褶皱广泛发育，地质条件很复杂. 在开采前，需先对井采区进行有无铁矿预测.

预测过程可按如下步骤进行：

(1) 在矿区内取一试验地段，面积为 250km^2. 把 1km^2 作为一预测单元，并把试验区分成两类，"有矿"与"无矿"，它们都是预测单元集上的模糊子集，分别记为 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，而待预测区也是一模糊集，用 $\underset{\sim}{C}$ 表示.

(2) 在 1∶25000 地质图和航磁图上取下列五种地质变量和

地球物理变量作为矿产预测的特征量．它们是：

①中性岩浆岩在单元中的出露面积（万 m^2）；

②奥陶系中统灰岩在单元内的出露面积（万 m^2）；

③单元内的断裂构造长度（m）；

④单元内平均航磁值（伽玛）；

⑤单元内最高航磁值（伽玛）．

分别用 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 表示．

（3）在试验区内选取了 22 个已知有矿的单元，设第 j 个单元上前述五个特征量的实测数据为 $(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j}, x_{5j})(j=1, 2, \cdots, 22)$．

令
$$\bar{x}_i = \frac{1}{22}\sum_{j=1}^{22} x_{ij},\quad \sigma_i^2 = \frac{1}{21}\sum_{j=1}^{22}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$
$$(i = 1,2,\cdots,5)$$

则模糊集"有矿" $\underset{\sim}{A}$ 的对各个特征量的分隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}_i(x_i) = \exp[-(x_i - \bar{x}_i)^2/\sigma_i^2] \quad (i = 1,2,\cdots,5)$$

同样，在试验区内选取若干个应判为"无矿"的已知单元，建立"无矿" $\underset{\sim}{B}$ 的对每个特征量的分隶属函数

$$\underset{\sim}{B}_i(x_i) = \exp[-(x_i - \bar{x}'_i)^2/\sigma_i'^2] \quad (i = 1,2,\cdots,5)$$

此处 $\bar{x}'_i$ 及 $\sigma_i'^2$ 分别为无矿单元第 i 个特征量观察值的样本均值与样本方差．

有关的参数值见表 10-2．

表 10-2　试验区的参数值

类型		变量				
		1	2	3	4	5
有矿（$\underset{\sim}{A}$）	$\bar{x}_i$	37.49	61.52	364.55	331.82	540.91
	σ_i	44.78	29.82	941.79	176.30	312.68
无矿（$\underset{\sim}{B}$）	$\bar{x}'_i$	5.51	12.49	310	33.08	23.08
	σ'_i	19.88	25.42	674.77	43.85	43.85

(4) 构造模糊集 $\underset{\sim}{C}$ 的对各特征量的分隶属函数

$$\underset{\sim}{C}_i(x_i) = \exp[-(x_i - \bar{x}_i'')^2/\sigma_i''^2] \quad (i = 1,2,\cdots,5)$$

其中 $\bar{x}_i''$ 及 $\sigma_i''^2$ 分别为待预测区第 i 个特征量观测值的样本均值与样本方差（见表10-3）.

表 10-3　预测区的参数值

参　数	变　量				
	1	2	3	4	5
$\bar{x}_i''$	36.72	53.21	387.50	283.33	475.00
σ_i''	29.03	29.41	785.63	128.51	217.94

(5) 分别计算 $\underset{\sim}{C}_i$ 与 $\underset{\sim}{A}_i$、$\underset{\sim}{B}_i$ ($i=1, 2, \cdots, 5$) 的格贴近度. 利用2.4节末尾的结果，通过计算可得

$$D_g(\underset{\sim}{C}_1, \underset{\sim}{A}_1) = 0.99989, \quad D_g(\underset{\sim}{C}_2, \underset{\sim}{A}_2) = 0.98051,$$

$$D_g(\underset{\sim}{C}_3, \underset{\sim}{A}_3) = 0.99982, \quad D_g(\underset{\sim}{C}_4, \underset{\sim}{A}_4) = 0.97501,$$

$$D_g(\underset{\sim}{C}_5, \underset{\sim}{A}_5) = 0.98469, \quad D_g(\underset{\sim}{C}_1, \underset{\sim}{B}_1) = 0.66552,$$

$$D_g(\underset{\sim}{C}_2, \underset{\sim}{B}_2) = 0.57606, \quad D_g(\underset{\sim}{C}_3, \underset{\sim}{B}_3) = 0.99719,$$

$$D_g(\underset{\sim}{C}_4, \underset{\sim}{B}_4) = 0.12148, \quad D_g(\underset{\sim}{C}_5, \underset{\sim}{B}_5) = 0.05079.$$

(6) 由于

$$s_1 = \bigwedge_{i=1}^{5} \{D_g(\underset{\sim}{C}_i, \underset{\sim}{A}_i)\} = 0.97501$$

$$s_2 = \bigwedge_{i=1}^{5} \{D_g(\underset{\sim}{C}_i, \underset{\sim}{B}_i)\} = 0$$

故按择近原则应预报待预测区“有矿”，具有开采价值.

例 10-4　在植物生产科学中，种植密度与产量有密切关系. 已知某种杉树的种植密度与产量有如下的函数关系

$$v = f(\rho) = \frac{10^6}{(2\rho)} \qquad (\rho \geqslant 1000)$$

其中ρ表示每公顷（10000m^2）上种植的棵数，v表示每公顷上木材的体积. 设有一片杉树森林，其密度不匀，估计ρ"大约三千". "大约三千"是一个模糊集，记为$\underset{\sim}{A}$，其隶属函数

$$\underset{\sim}{A}(\rho) = e^{-\frac{(\rho-3000)^2}{10^6}}$$

试估计该森林每公顷木材的最高产量.

解 因为$f'(\rho) = -10^6/(2\rho^2) < 0$，所以$f(\rho)$单调减. 因此$\sup f(\rho) = 500$，$\inf f(\rho) = 0$. 从而

$$\underset{\sim}{M}_f(\rho) = f(\rho)/500 = 10^3/\rho$$

分别画出$\underset{\sim}{A}(\rho)$与$\underset{\sim}{M}_f(\rho)$的图像(见图 10-4).

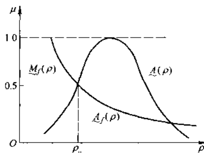


图 10-4 $\underset{\sim}{A}_f$的隶属函数曲线

由图 10-4 可以看出，f在$\underset{\sim}{A}$上的模糊条件极大点应满足方程

$$\frac{10^3}{\rho} = e^{-\frac{(\rho-3000)^2}{10^6}}$$

此方程有两个解，其中较小的解为$\rho_0 = 2130$，于是f的模糊条件极大值为$f(2130) = 234.74$(m^3)，即该森林每公顷木材最高产量估计为234.74m^3.

习 题 10

1. 已知影响某地区汛期降水量的四个要素为二月份最低气温≤－5℃

的日数长，冬季（12～2月）极端最低气温低，极端最低气温出现的时间长和冬季平均气温低；它们均为模糊集，分别记为 $\underset{\sim}{A}_1$、$\underset{\sim}{A}_2$、$\underset{\sim}{A}_3$、$\underset{\sim}{A}_4$. 设 X 为各年份的集合，对 $\forall x \in X$，$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$，其中 x_1，x_2，x_3，x_4 分别表示 x 年的上述4个因素的数量指标，定义 $\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，$\underset{\sim}{A}_3$，$\underset{\sim}{A}_4$ 的隶属函数如下：

$$\underset{\sim}{A}_1(x_1) = \begin{cases} 0 & , \quad x_1 \leqslant 4 \\ \left[1 + \left(\dfrac{x_1 - 4}{2}\right)^{-2}\right]^{-1} & , \quad x_1 > 4 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{A}_2(x_2) = \begin{cases} 1 & , \quad x_2 \leqslant -12 \\ \left[1 + \left(\dfrac{x_2 + 12}{2}\right)^{2}\right]^{-1} & , \quad x_2 > -12 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{A}_3(x_3) = \begin{cases} 0 & , \quad x_3 \leqslant 30 \\ \dfrac{x_3 - 30}{30} & , \quad 30 < x_3 < 60 \\ 1 & , \quad x_3 \geqslant 60 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{A}_4(x_4) = \begin{cases} 1 & , \quad x_4 \leqslant 3 \\ 1 - \dfrac{x_4 - 3}{0.6} & , \quad 3 < x_4 < 3.6 \\ 0 & , \quad x_4 \geqslant 3.6 \end{cases}$$

令 $\quad E(x) = (\underset{\sim}{A}_1(x_1) \wedge \underset{\sim}{A}_3(x_3)) \vee (\underset{\sim}{A}_2(x_2) \wedge \underset{\sim}{A}_4(x_4))$

应用阈值原则($\alpha = 0.6$)，根据 $E(x)$ 的大小，预测当 $x = (8, -13.4, 70, 3.3)$ 时，该地区降水量的大小.

2. 某人买一件衣服的条件是：式样一般 A_1，质量上乘 A_2，尺寸合适 A_3，价格低廉 A_4，现有五件衣服可供挑选. 即 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 每件衣服评价指标见下表：

U	1	2	3	4	5
A_1	0	0.7	0.5	0.8	1
A_2	1	0.8	1	0.4	0.6

续表

U	1	2	3	4	5
A_3	1	0.8	1	1	0.8
A_4	1	0.33	0	0.25	0.5

试将式样、质量、尺寸看作模糊约束条件，而把价格当作目标函数，用凸模糊判决估计该人买哪一件衣服（取 $a=0.4$，$b=0.6$）？

第 11 章　模糊决策

决策是人们生活和工作中普遍存在的一种活动，是各类管理过程的核心，也是执行各种管理过程的基础．本章重点介绍几种常用的模糊决策方法．

11.1　决策及其过程

11.1.1　决策

决策，从狭义上讲就是抉择，即为解决当前或未来可能发生的问题，从若干行动方案中选择最佳方案的过程．比如，某人要外出办事，由于天阴，他就要对是否要带雨具这个问题作出决策；一个企业面对激烈的市场竞争，对一项新产品要不要投产也要有关人员进行认真的调查研究后作出决策．又如，春秋战国时期的孙膑为田忌赛马胜齐王，三国时期的诸葛亮作“隆中对”都是决策的例子．不过，那时的决策基本上是凭借决策者的经验作出的，可以称为经验决策．

当今科学技术高速发展，各类学科高度分化又高度综合，社会化的大生产带来了社会活动的根本变革，使之变得越来越复杂．在这样的大系统中，完全靠经验来决策是行不通的，必须立足于科学技术，应用科学方法来决策．当然这并不是排除人的经验的有用性，恰恰相反，只有求助于高度发达的科学技术，才能有效地应用人的经验作出好的决策．那么什么是好的决策呢？有两种准则——最优性准则与满意性准则．最优性准则一般是指在理想条件下，达到最优的目标，但实际上理想条件往往是不存在的，有时最优目标根本无法实现，因此常常放弃最优性而追求满意的结果，这就是满意性准则．不过，我们常常使用“最优”

的概念，表示对目标具有最佳符合程度或最满意.

决策的好坏关系重大，小则关系到事情的成败，企业的盛衰，大则关系到国家的生死存亡，因此，决策者必须有科学的作风，掌握科学的决策原理和方法，多做调查研究尽可能地作出正确、合理的决策.

11.1.2 决策过程

一个决策，必须有准备、分析、讨论、计算、选择、决定、实施、修正、总结等环节．这实际上是一个控制过程．从广义决策的意义上讲，决策与控制（下一章将介绍）在本质上并无区别．不过，对于社会经济等大系统而言，决策术语似乎使用较多，而控制的语言则更多地使用于技术领域.

按照这一观点，前几章介绍过的排序、规划、识别、聚类以及预测都可列入决策的范畴.

决策过程可以用框图来表示（见图 11-1）.

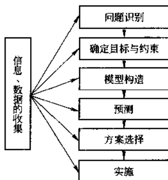


图 11-1 决策过程框图

问题识别 在决策之前，对要解决的问题进行认识.

确定目标与约束 根据实际问题确定决策目标与选择约束条件，使得在该约束条件下，备择方案集中的每一方案都是可行

的.

模型构造 构造数学模型，使满足于约束条件的备择方案与目标相联系.

预测 应用研究未来的理论和技术，进行对输出结果的科学预测，为决策提供科学依据.

方案选择 根据模型的类型、特点，选用适当的方法，权衡利弊，从可行解方案集中选择一个最佳方案，这是决策过程的中心环节.

实施 把选择的方案付诸实施，但要随时注意执行情况，发现新问题，及时修正，调整，以保证达到预期目标.

以上就是决策的整个过程.

现实中的决策问题，或多或少都带有模糊性，对此我们不必过分地追求精确. 因为过分追求精确反而会适得其反，使近似于实际的程度变低，而适当的模糊反而会更符合实际，因而采用模糊集方法来处理这类决策问题就比较自然. 这就是所谓模糊决策. 但要说明的是，模糊决策绝不是放弃数学的严密性去拍脑袋，相反，它是用严格的数学方法去研究和处理带有模糊性的决策问题，它的一个显著特点是对决策者经验的合理应用，并能够充分体现决策者的主观愿望.

为了不使涉及面过宽，本章只限于讨论论域为有限集的情形，我们的主要任务是介绍典型的模糊决策模型.

11.2 模糊群体决策

模糊群体决策又叫意见集中，它是从个体的优先次序出发得到群体的优先次序从而作出决策. 群体决策有着广泛的实际背景. 比如评聘教授、评选先进工作者、评选获奖项目及在经济管理中的分配资金、确定投资项目、选择新产品开发方案、各领导层中重大问题的决定，都需经过民主讨论，最后集中意见. 总之，凡是经过个体讨论达到统一意见的场合都离不开这一关键环节——意见集中. 传统的集体表决，领导裁定等手段都有不合理

之处. 因此，给出一种定量决策方法作为定性决策的辅助工具，或者一种决策支持，甚至在可能的情况下取代传统的定性方法就是十分必要的了.

设在某决策问题中有 n 个方案可供选择，构成决策问题的备择集，记为

$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

参与决策的 m 个个体构成一个群体，记为

$$D = \{d_1, d_2, \cdots, d_m\}$$

D 中的每个个体都将 U 中的 n 个元素（方案）排出优先次序，或称排出一个线性序. 习惯上称一个线性序为一个意见，于是就产生了 m 种意见. 如何将这 m 种意见集中成一个意见呢? 例如，设备择集

$$U = \{a, b, c, d\}$$

而 $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ 且设四个决策者对 U 提出的四种意见为:

$$L_1: abcd; \quad L_2: bcad; \quad L_3: dabc; \quad L_4: abdc.$$

下面我们以此例来说明三种集中的方法.

11.2.1 评分法

设 L_i 是 U 中的一个意见，令 $u \in U$，$B_i(u)$ 表示在 L_i 中后于 u 的元素个数，如果有 m 个意见 L_1，L_2，$\cdots$，L_m，记

$$B(u) = \sum_{i=1}^{m} B_i(u)$$

$B(u)$ 称为 u 的 Borda 数，U 中的元素按 Borda 数的大小就可得到一个新的意见. 易见，若 u 在 L_i 中是第一名，则 $B_i(u) = n-1$，若 u 是第二名，则 $B_i(u) = n-2$，$\cdots$，若 u 是第 k 名，则 $B_i(u) = n-k$. 因此 $B_i(u)$ 可看作 u 在 L_i 中的得分，Borda 数就是 u 在各个意见 L_1，L_2，$\cdots$，L_m 中的得分总和. 如在此例中，$B_1(a) = 3$，

$B_2(a)=1$，$B_3(a)=2$，$B_4(a)=3$，故 $B(a)=3+1+2+3=9$，同样可得 $B(b)=8$，$B(c)=3$，$B(d)=4$. 于是得到一个新的意见 L：$abdc$，这是四个意见 L_1，L_2，L_2，L_4 集中的结果.

评分法简单易行，但有时会出现集中后的意见与人们的直觉不相吻合的现象. 例如：若 $U=\{a, b, c, d, e, f\}$，有五种意见如下：

$L_1:abcdef$;　$L_2:abcdef$;　$L_3:abcdef$;　$L_4:abcdef$;　$L_5:bcdefa$.

用评分法 $B(a)=4\times5=20, B(b)=4\times4+5=21, B(c)=16$, $B(d)=11, B(e)=6, B(f)=1$，集中后的次序为 L：$bacdef$，这显然是不太合理的，借用体育比赛的术语，a 得了 4 块金牌，b 得了 1 块金牌和 4 块银牌，而 b 的得分却比 a 多 1 分，这是人们当然不能接受的.

11.2.2 最小距离法

设 L_1，L_2 是 U 的两个线性序，对于 U 中的一对元素 $(u_i, u_j)(i\neq j)$，定义

$$\delta(u_i,u_j)=\begin{cases}0, \text{若 } u_i,u_j \text{ 的顺序在 } L_1 \text{ 和 } L_2 \text{ 中是相同的}\\ 1, \text{若 } u_i,u_j \text{ 的顺序在 } L_1 \text{ 和 } L_2 \text{ 中是不同的}\end{cases}$$

再定义 L_1，L_2 的距离 $d(L_1, L_2)$ 为一切元素对 (u_i, u_j) 的距离 $\delta(u_i, u_j)$ 之和，即

$$d(L_1,L_2)=\sum_{i\neq j}\delta(u_i,u_j)\qquad ((u_i,u_j)\in U\times U)$$

设有 m 种线性序 L_1，L_2，…，L_m，要求集中后的意见 L 与 L_1，L_2，…，L_m 的距离之和为最小. 在上例中，用评分法集中后的意见为 L：$abdc$，L 与 L_1，L_2，L_3，L_4 的距离分别为

$$d(L,L_1)=0+0+0+0+0+1=1$$

$$d(L,L_2)=0+1+0+1+1+0=3$$

$$d(L,L_3)=1+1+0+0+0+0=2$$

$$d(L,L_4) = 0+0+0+0+0+0 = 0$$

因此有

$$d(L,L_1)+d(L,L_2)+d(L,L_3)+d(L,L_4)$$
$$=1+3+2+0=6$$

经过枚举试验，距离和为6是最小的. 此外，L'：*abcd* 与各意见的距离和也是6，因此按最小距离法 L 和 L'都可作为集中后的意见.

最小距离法的缺点是尚未找到一个简便实用的算法来求距离和最小意见，并且集中后的意见也不唯一，还需作进一步决策.

11.2.3 Blin 法

设有 m 个意见把 U 中元素排成线性序，用 N_{ij}表示 u_i 先于 u_j 的意见数目，令

$$r_{ij} = \frac{N_{ij}}{m} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

这样就可以构造一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，其中 $\underset{\sim}{R}(u_i,u_j)=r_{ij}$，表示 u_i 优于 u_j 的程度，显然有 $r_{ii}=0$，$r_{ij}+r_{ji}=1(i\neq j)$. $R=(r_{ij})_{n\times n}$称为竞赛矩阵. 可以证明 R 的 1-截矩阵满足反对称性和传递性，因而是一个偏序，记为P. 又由著名的 Szpilrajn 定理，任一偏序都可扩张为一个线性序，故 P 也可扩张为线性序，但扩张的方式一般不是唯一的，于是我们便可由扩张的线性序找到集中的意见. 具体地说，设P的所有线性扩张组成的集为 $\mathscr{L}$. 在 $\mathscr{L}$ 中要找一个线性序 L^*，使得

$$\sum_{(u_i,u_j)\in L^*} \underset{\sim}{R}(u_i,u_j) = \max_{L\in\mathscr{L}} \sum_{(u_i,u_j)\in L} \underset{\sim}{R}(u_i,u_j)$$

即若 $L\in\mathscr{L}$，令 $P(L)=\sum_{(u_i,u_j)\in L} \underset{\sim}{R}(u_i,u_j)$ 表示线性序 L 与模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的“一致性指标”，而 L^* 就是一致性指标最大的线性序，

称为最优线性序，也就是集中后的意见.

仍用前面的例子说明：

$$L_1:abcd;\quad L_2:bcad;\quad L_3:dabc;\quad L_4:abdc.$$

记 $u_1=a$，$u_2=b$，$u_3=c$，$u_4=d$，$m=4$ 由公式

$$r_{ij}=\underset{\sim}{R}(u_i,u_j)=\frac{N_{ij}}{m}$$

计算得

$$r_{12}=\frac{3}{4},\quad r_{13}=\frac{3}{4},\quad r_{14}=\frac{3}{4},\quad r_{23}=\frac{4}{4},$$

$$r_{24}=\frac{3}{4},\quad r_{34}=\frac{2}{4},\quad r_{ii}=0(i=1,2,3,4).$$

再由 $r_{ij}+r_{ji}=1$，于是

$$R=\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{2}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0.75 & 0.75 & 0.75\\ 0.25 & 0 & 1 & 0.75\\ 0.25 & 0 & 0 & 0.5\\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0\end{pmatrix}$$

求 R 的1-截矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

即 $P=\{(b,c)\}$，表示 P 中只有 b 是先于 c 的，其他元素不可比较（无先后顺序）. 将 P 扩张为线性序，共有 12 种方式，它们是

$$L_1':abcd;\quad L_2':abdc;\quad L_3':adbc;\quad L_4':dabc;$$

L_5': *bacd*; L_6': *badc*; L_7': *bdac*; L_8': *dbac*;

L_9': *bcad*; L_{10}': *bcda*; L_{11}': *bdca*; L_{12}': *dbca*.

计算它们的一致性指标：

$$P(L_1') = \sum_{(u_i,u_j)\in L_1'} \underset{\sim}{R}(u_i,u_j)$$

$$=0.75+0.75+0.75+1+0.75+0.5=4.5$$

同理 $P(L_2')=4.5$, $P(L_3')=4$, $P(L_4')=3.5$,

$P(L_5')=4$, $P(L_6')=4$, $P(L_7')=3.5$,

$P(L_8')=3$, $P(L_9')=3.5$, $P(L_{10}')=3$,

$P(L_{11}')=3$, $P(L_{12}')=2.5$.

由于 L_1', L_2' 的一致性指标最大，故 *abcd* 和 *abdc* 为最优线性序.

11.3 模糊相对决策

人们认识事物，往往从二元对比开始. 比如按个子的高低，给出一些学生的排队顺序，就是两两进行的，但是这种方法有其局限性，在某些情况下并不适用. 比如我们比较甲、乙、丙三人的性格，就不会像排队那样得出一个确定的顺序，常常会出现这样的情况："甲比乙性格好"，"乙比丙性格好"，但又觉得"丙比甲性格好". 这是为什么呢？实际上，这个问题与排队问题不同. 排队时，是通过比较两人的身高（每人的身高是确定的，可用实数来度量）排出顺序，但人的性格不能用一确定的数来度量，因此也就无法给出其顺序. 这里要考虑的是"模糊顺序"，它涉及到的因素较多，通常不满足数学上对序的要求，主要是不满足传递性，从而导致上述问题的出现. 虽然如此，但实际问题又往往要求我们排出它们的顺序. 那么怎样在二元对比的基础上确定整体的顺序呢？这就是本节介绍的内容——模糊相对决策法要解决的问题. 其基本思想是先把事物两两对比，以确定二者的顺序，然后根据某种规则得出整体顺序.

模糊相对决策有四种方法.

11.3.1 择优比较决策法

这种方法引自心理物理学，我们举例说明.

例 11-1 生产乒乓球拍，哪种颜色最受人欢迎，设 $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 为被选择的红，橙，黄，绿，蓝五种颜色组成的集合.

随机抽 500 人作为被试对象，规定每人试 20 次，总共试验 20 次/人 × 500 人 = 10000 次，每次从 U 中选出两种颜色对比，从中挑出一种作为自己喜爱的颜色. 每人按表 11-1 的次序进行两遍，结果见表 11-1.

表 11-1 择优选择试验次序表

颜色	红	橙	黄	绿	蓝
红					
橙	1				
黄	5	2			
绿	8	6	3		
蓝	10	9	7	4	

当把红色和橙色进行比较时,若认为橙色比红色好,就在 1 号空格的斜线下方划"√",反之在斜线上方划"√",其余相同.

把择优结果统计填入表 11-2.

表 11-2 择优次数统计表

劣 优	红	橙	黄	绿	蓝	Σ	%	顺序
红		517	525	545	661	2248	22.48	2
橙	483		841	477	576	2377	23.77	1
黄	475	159		534	614	1782	17.82	4
绿	455	523	466		643	2087	20.87	3
蓝	339	424	386	357		1506	15.06	5

在表 11-2 中，各行的总和按其大小顺序就给出了人们喜爱这几种颜色的一个决策，即橙，红，绿，黄，蓝.

11.3.2 优先关系决策法

设有 n 个对象 u_1，u_2，…，u_n，按照某种关系要在它们之间排一个优劣次序，我们用 c_{ij} 表示 u_i 与 u_j 相比较时 u_i 比 u_j 优越的成分，它满足 $c_{ii}=0$（自己没有比自己更多的长处）；$0\leqslant c_{ij}\leqslant 1$，$c_{ij}+c_{ji}=1$（把双方的相对长处加在一起的总量为 1）；当只发现 u_i 比 u_j 有长处而未发现 u_j 比 u_i 有任何长处时，$c_{ij}=1$，$c_{ji}=0$；当 u_i 比 u_j 的长处与 u_j 比 u_i 的长处一样多时，$c_{ij}=c_{ji}=0.5$. 于是便可得到一个 $n\times n$ 矩阵，记为 $C=(c_{ij})_{n\times n}$. 称为优先关系矩阵. 取 $\lambda\in[0,1]$，可求 C 的截矩阵 $C_\lambda=({}_\lambda c_{ij})$. 当 λ 从 1 降到 0 时，若首次出现 C_{λ_1}，它的第 i_1 行元素除主对角线元素之外全等于 1，则 u_{i_1} 算作第一优越对象（不一定唯一），除去第一优越的那一批对象，就得到一个新的优先关系矩阵，用同样的方法可取得第二批优越对象……，如此下去，可以将全体对象排出一个优劣次序.

例 11-2 设 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ 为甲、乙、丙三人组成的集合，按照“待人热情”这一尺度给他们排序. 通过专门人员的判别，得到优先关系矩阵

$$C=\begin{pmatrix}0 & 0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.7\\ 0.8 & 0.3 & 0\end{pmatrix}$$

令 λ 从大到小依次截取，得

$$C_{0.9}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad C_{0.8}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$C_{0.7}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad C_{0.3}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

当 λ 降至 0.3 时，在 $C_{0.3}$ 中首次出现第三行除主对角线元素之

外，其余元素均为 1，这意味着 u_3 对其余元素的优越成分一致地越过了 0.3，因此把 u_3 当作第一优越对象，去掉 u_3，得到新的优先关系矩阵

$$C^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 0.9\\ 0.1 & 0\end{pmatrix}$$

注意到

$$C_{0.9}^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

的第一行除主对角线元素外其余为 1，取第二优越元素为 u_1，故就“待人热情”来说，三人的次序为 u_3，u_1，u_2.

值得指出的是，此方法的着眼点是“优越性一致超过 λ”这几个字. 如在本例中 $C_{32}=0.3$，表明 u_3 超过 u_2 三分，而 u_2 超过 u_3 七分，u_3 与 u_2 对比中 u_3 是不如 u_2 的，但从一致性上考虑，仍把 u_3 排在 u_2 的前头. 因此在运用时，要注意所联系的实际问题是否具有这种特点.

11.3.3 相对比较法

设论域为 $U=\{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n\}$，对 $u_i\in U(i=1, 2, \cdots, n)$ 等元素需按某种特性排序，我们可先在二元对比中建立比较级，然后再通过一定的算法化为总体的顺序.

具体步骤如下：

（1）建立二元相对比较级　对 $\forall(u_i, u_j)$，所谓二元相对比较级是指数对 $(f_{u_j}(u_i), f_{u_i}(u_j))$，它满足

$$0\leqslant f_{u_j}(u_i),\quad f_{u_i}(u_j)\leqslant 1$$

其含义是，在 u_i 与 u_j 的二元对比中，如果 u_i 具有某特性的程度为 $f_{u_j}(u_i)$ 的话，那么 $f_{u_i}(u_j)$ 就表示 u_j 具有该特性的程度（比较级可由统计得到）.

（2）建立相及矩阵　记

$$f\left(\frac{u_i}{u_j}\right)\triangleq\frac{f_{u_j}(u_i)}{\max(f_{u_i}(u_j), f_{u_j}(u_i))}$$

易见
$$f\left(\frac{u_i}{u_j}\right)=\begin{cases}\dfrac{f_{u_j}(u_i)}{f_{u_i}(u_j)}, & f_{u_j}(u_i)<f_{u_i}(u_j)\\ 1\ , & f_{u_j}(u_i)\geqslant f_{u_i}(u_j)\end{cases}$$

以$f(u_i/u_j)$为元素作矩阵（$f(u/u)$取作1）

$$\begin{pmatrix}1 & f\left(\frac{u_1}{u_2}\right) & \cdots & f\left(\frac{u_1}{u_n}\right)\\ f\left(\frac{u_2}{u_1}\right) & 1 & \cdots & f\left(\frac{u_2}{u_n}\right)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f\left(\frac{u_n}{u_1}\right) & f\left(\frac{u_n}{u_2}\right) & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

称为相及矩阵.

（3）建立整体顺序（求隶属函数）　根据相及矩阵，列出顺序表（见表11-3）.

表 11-3　排序表（$f(a/b)$）

a \ b	u_1	u_2	…	u_n	min
u_1	1	$f(u_1/u_2)$	…	$f(u_1/u_n)$	μ_1
u_2	$f(u_2/u_1)$	1	…	$f(u_2/u_n)$	μ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
u_n	$f(u_n/u_1)$	$f(u_n/u_2)$	…	1	μ_n

表中最后一列的值是相应行的最小值，即

$$\mu_i=\min\left(f\left(\frac{u_i}{u_1}\right),\cdots,f\left(\frac{u_i}{u_n}\right)\right)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

例 11-3　设论域$U=\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$为长子，次子，幼子组成的集合．$\underset{\sim}{A}$为“像爸爸”在U上的模糊集，试确定$\underset{\sim}{A}$的隶属函数.

解　先建立二元相对比较级（见表11-4）.

表 11-4　二元相对比较级 ($f_b(a)$)

b \ a	u_1	u_2	u_3	b \ a	u_1	u_2	u_3
u_1		0.8	0.5	u_3	0.3	0.7	
u_2	0.5		0.4				

即

$$(f_{u_2}(u_1),\ f_{u_1}(u_2)) = (0.8, 0.5)$$

$$(f_{u_3}(u_1),\ f_{u_1}(u_3)) = (0.5, 0.3)$$

$$(f_{u_3}(u_2),\ f_{u_2}(u_3)) = (0.4, 0.7)$$

长子与次子的二元相对比较级是 (0.8, 0.5)，其含义是长子 u_1 与次子 u_2 相对照，如果把长子像爸爸的程度定为 0.8 的话，那么次子像爸爸的程度就应该是 0.5，当然 0.8 和 0.5 并不是他们像爸爸的绝对度量，而是具有相对性（事实上绝对的度量是得不到的，否则它也不是模糊的了）.

然后建立相及矩阵及整体顺序（见表 11-5）.

表 11-5　相及矩阵与整体顺序

b \ a	u_1	u_2	u_3	min	b \ a	u_1	u_2	u_3	min
u_1	1	1	1	1	u_3	$\frac{3}{5}$	1	1	$\frac{3}{5}$
u_2	$\frac{5}{8}$	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$					

由表 11-5 最后一列知，长子最像爸爸，幼子次之，次子最不像.

11.3.4　对比平均决策法

我们通过实例来说明这种方法.

例 11-4　设 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ 为樱花、菊花、蒲公英三种花组成的集合，$\underset{\sim}{A}$ 为“美”在 U 上的模糊集，试确定其隶属函数.

解　建立二元相对比较级（见表 11-6）.

表 11-6 三种花的相对比较级 ($f_b(a)$)

b \ a	u_1	u_2	u_3	b \ a	u_1	u_2	u_3
u_1	1	0.8	0.9	u_3	0.5	0.4	1
u_2	0.7	1	0.8				

定义 u_i 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度

$$\underset{\sim}{A}(u_i) = \frac{(f_{u_1}(u_i) + f_{u_2}(u_i) + f_{u_3}(u_i))}{3} \quad (i = 1,2,3)$$

上式中，1/3 是权数，因共有三种花，各占 1/3．由于

$$\underset{\sim}{A}(u_1) = \frac{(f_{u_1}(u_1) + f_{u_2}(u_1) + f_{u_3}(u_1))}{3}$$

$$= \frac{(1 + 0.8 + 0.9)}{3} \approx 0.9$$

$$\underset{\sim}{A}(u_2) = \frac{(f_{u_1}(u_2) + f_{u_2}(u_2) + f_{u_3}(u_2))}{3}$$

$$= \frac{(0.7 + 1 + 0.8)}{3} \approx 0.83$$

$$\underset{\sim}{A}(u_3) = \frac{(f_{u_1}(u_3) + f_{u_2}(u_3) + f_{u_3}(u_3))}{3}$$

$$= \frac{(0.5 + 0.4 + 1)}{3} \approx 0.63$$

故

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.9}{u_1} + \frac{0.83}{u_2} + \frac{0.63}{u_3}$$

可知美的次序从大到小为樱花，菊花，蒲公英．

这里各种花的权数是相同的，即它们是平权的．但如果考虑偏爱或特殊兴趣，也可以是非平权的，例如给樱花、菊花、蒲公英分别赋权数 0.1、0.8、0.1，则得

$$\underset{\sim}{A}(u_1) = 0.1 \times f_{u_1}(u_1) + 0.8 \times f_{u_2}(u_1) + 0.1 \times f_{u_3}(u_1)$$

$$= 0.1 \times 1 + 0.8 \times 0.8 + 0.1 \times 0.9 = 0.83$$

$$\underset{\sim}{A}(u_2) = 0.1 \times f_{u_1}(u_2) + 0.8 \times f_{u_2}(u_2) + 0.1 \times f_{u_3}(u_2)$$

$$= 0.1 \times 0.7 + 0.8 \times 1 + 0.1 \times 0.8 = 0.95$$

$$\underset{\sim}{A}(u_3) = 0.1 \times f_{u_1}(u_3) + 0.8 \times f_{u_2}(u_3) + 0.1 \times f_{u_3}(u_3)$$

$$= 0.1 \times 0.5 + 0.8 \times 0.4 + 0.1 \times 1 = 0.47$$

从而，美的次序为菊花，樱花，蒲公英.

菊花在此夺魁的原因是由于偏爱者给它加上了很大的权数.

11.4 模糊综合决策

在实际问题中，我们总要比较不同事物然后择优取用. 如仅考察单一因素，那么问题较简单，只需分别给对象一个评价分数，依分数高低，便可排出对象的优劣次序. 然而，同一事物往往有多种属性，有的属性还带有模糊性，人们对这类事物的评价，不是简单的“好”与“不好”，而是用模糊语言分为不同程度的评语，此时在进行比较时，就必须既要兼顾到各个方面，又要注意到它们程度上的差异. 在这种情况下要排出它们的次序，找出最优者，就需综合考虑，这就要用到模糊综合决策. 简单地说，模糊综合决策就是应用模糊集方法通过对事物所涉及到的因素进行单一决策，然后综合各方面的情况，给出该事物一个总体决策.

模糊综合决策又称为模糊综合评判，它有着广泛的用途，比如在生产规划、管理调度以及社会经济等复杂系统中要作出任何一个决策，都要对其相应因素进行综合考虑，这就是模糊综合决策问题.

11.4.1 单层综合决策

假定某类事物由 n 个因素决定，构成因素集

$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

又设所有可能出现的评语为 m 个，构成评语集

$$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$$

单层综合决策模型为

$$B = A \circ R$$

其中$B=(b_1, b_2, \cdots, b_m)$是$V$上的模糊集，它是对事物的一个总体评价，也是赖以作出决策的依据；$A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$是$U$上的模糊集，称为权重分配阵，它是对因素的一个统一的权衡，满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

$R=(r_{ij})_{n\times m}$称为综合评判变换矩阵.

综合决策的步骤如下：

(1) 单因素评判 给出模糊映射

$$\underset{\sim}{f}: U \to \mathscr{F}(V)$$

$$u_i \mapsto \underset{\sim}{f}(u_i) = (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im})$$

其中$\underset{\sim}{f}(u_i)$是关于因素u_i的评语模糊向量，它是对u_i的一个评价. r_{ij}表示关于u_i具有评语v_j的程度($i=1, 2, \cdots, n$; $j=1, 2, \cdots, m$).

(2) 求综合评判变换矩阵 由$\underset{\sim}{f}$导出U到V的模糊关系矩阵

$$R = R_{\underset{\sim}{f}} = (r_{ij})_{n\times m}$$

即为综合评判变换矩阵.

(3) 综合评判 对于因素集U上的模糊集$A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，通过$R$变换为评语集$V$上的模糊集

$$B = A \circ R = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$$

其中$b_j = \bigvee_{k=1}^{n} (a_k \wedge r_{kj})$ $(j = 1,2,\cdots,m)$. 再将B归一化，即令

$$B' = (b_1', b_2', \cdots, b_m')$$

而

$$b_j' = \frac{b_j}{\sum_{i=1}^{m} b_i} \qquad (j = 1,2,\cdots,m)$$

根据总体评价B'及最大隶属原则，就可对该事物作出决策.

若要找出多个事物的最优者，可进行下一步.

(4) 计算综合决策值

$$N = B' \cdot C^T$$

这里 $C=(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ 是评语集的一个权重分配，C^T 是 C 的转置矩阵. 按普通矩阵的乘法，就可以得到综合决策值，然后根据其值的大小，便可找出该类事物的最优者.

例 11-5 设某服装厂设计了一种新式服装，试就样式、面料、耐穿程度、流行性、商标、价格进行综合评判，以决定是否批量生产.

解 由题意，选取因素集

$$U = \{\text{样式,面料,耐穿程度,流行性,商标,价格}\}$$
$$= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

根据人们的习惯，选评语集

$$V = \{\text{很受欢迎,比较受欢迎,一般,不受欢迎}\}$$
$$= \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

请一批专家和顾客分别对六个因素进行评价，结果如下：

$$u_1 \mapsto (0.55, 0.34, 0.10, 0.01)$$
$$u_2 \mapsto (0.60, 0.15, 0.25, 0)$$
$$u_3 \mapsto (0.25, 0.40, 0.15, 0.20)$$
$$u_4 \mapsto (0.80, 0.12, 0.08, 0)$$
$$u_5 \mapsto (0.50, 0.38, 0.12, 0)$$
$$u_6 \mapsto (0.21, 0.17, 0.44, 0.18)$$

于是得综合评判变换矩阵

$$R = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.34 & 0.10 & 0.01 \\ 0.60 & 0.15 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.40 & 0.15 & 0.20 \\ 0.80 & 0.12 & 0.08 & 0 \\ 0.50 & 0.38 & 0.12 & 0 \\ 0.21 & 0.17 & 0.44 & 0.18 \end{pmatrix}$$

不同的人，由于年龄、性别、爱好、职业和经济状况等的不同，对服装的各方面的要求也不一样，若通过调查知，这批人对

各因素总的偏好程度为（0.23，0.19，0.04，0.21，0.25，0.08），那么可得权重阵

$$A = (0.23, 0.19, 0.04, 0.21, 0.25, 0.08)$$

由决策模型，则有

$$B = A \circ R = (0.25, 0.25, 0.19, 0.08)$$

归一化，得 $B' = (0.32, 0.32, 0.25, 0.11)$

结果表明：隶属于很受欢迎和比较受欢迎的程度较大，如按最大隶属原则，此类服装是受欢迎的，可批量生产．但隶属于一般和不受欢迎的程度为0.36，因此这类服装还需改进．此外由得到的数据还告诉我们一些其他信息，例如价格的权重为0.08，说明着眼于价格的仅有0.08，这表明人民的生活水平提高了，设计服装时必须予以充分注意．

11.4.2 多层综合决策

有时一个问题的诸因素往往又是由若干个因素决定的．比如在对高等院校进行评比时，可就校风、校貌、教学、科研、后勤工作等几个方面进行考虑，其中教学的好坏，又是由师资状况、教学设施、学生质量等因素决定．同样，低一层次的单因素，也可以是由更低一层次的多因素所决定，对这类问题我们称为多层次问题．

对于多层次问题，我们把高层次的诸因素看作子问题，先对诸子问题分别进行综合评判，然后再对总体进行综合评判，即先对低层次因素进行综合，再对高一层的因素进行综合，这就是多层综合决策．下面给出三层综合决策模型，仿此可构造出任何层次的决策模型．

$$B = A \circ R = A \circ \begin{pmatrix} A_1 \circ R_1 \\ A_2 \circ R_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ A_n \circ R_n \end{pmatrix}$$

其中

$$R_1=\begin{pmatrix}A_{1_1}\circ R_{1_1}\\ \vdots \quad \vdots\\ A_{1_l}\circ R_{1_l}\end{pmatrix},\qquad R_2=\begin{pmatrix}A_{2_1}\circ R_{2_1}\\ \vdots \quad \vdots\\ A_{2_m}\circ R_{2_m}\end{pmatrix},$$

$$\cdots,\qquad R_n=\begin{pmatrix}A_{n_1}\circ R_{n_1}\\ \vdots \quad \vdots\\ A_{n_k}\circ R_{n_k}\end{pmatrix}.$$

而

$$R_{1_1}=\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_b\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad R_{1_l}=\begin{pmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_c\end{pmatrix};\quad R_{2_1}=\begin{pmatrix}D_1\\ \vdots\\ D_d\end{pmatrix},\cdots,$$

$$R_{2_m}=\begin{pmatrix}E_1\\ \vdots\\ E_e\end{pmatrix};\quad \cdots;\quad R_{n_1}=\begin{pmatrix}F_1\\ \vdots\\ F_f\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad R_{n_k}=\begin{pmatrix}G_1\\ \vdots\\ G_g\end{pmatrix}.$$

式中 B 为赖以作出决策的总体评价集;$A;A_1,\cdots,A_n;A_{1_1},\cdots,A_{1_l},\cdots,A_{n_1},\cdots,A_{n_k}$为各层次的权重阵;$R_1,\cdots,R_n;R_{1_1},\cdots,R_{1_l},\cdots,R_{n_1},\cdots,R_{n_k}$为各层次的评判变换阵;$B_1,\cdots,B_b;\cdots,G_1,\cdots,G_g$ 是 V 上的模糊集,它们分别是对最低层各因素的一个评价.

例 11-6 评价信息系统总体规划的 Fuzzy 模型(参见文献[23]):

为评价信息系统总体规划方案的优劣，以决定是否实施该方案，可根据多层综合决策思想，按如下步骤构造评价模型.

(1) 因素集和评语集的确定 确定因素集和评语集一般需和专业人员共同确定. 其原则为：既要全面又要抓主要矛盾，否则，会因漏掉主要因素而使评判不准确，或因选取因素过细而导致不必要的麻烦.

根据分析、选取；确定因素集 $U=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_{13}\}$，其中 $u_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 13)$的含义见表 11-7.

表 11-7　因素层次和级别划分表（评判卡）

方案名称			级别							
评判因素			一级		二级		三级		四级	
逻辑设计对信息系统支持度 u_1'	设计对目标保证度 u_1		完全保证		基本保证		大部保证		不能保证	
	目标分解的合理性 u_2		很合理		合　理		较合理		不合理	
	应用系统功能的恰当性 u_3		很恰当		恰　当		较恰当		不恰当	
开发计划可行性 u_2'	资金投入	投资计划的可靠性 u_4	很可靠		可　靠		较可靠		不可靠	
		超预算的可能性 u_5	不可能		可　能		较可能		很可能	
	设备提供	现有设备程度 u_6	已有 70%		已有 50%		已有 20%		已有 10%	
		提供设备可靠性 u_7	很可靠		可　靠		较可靠		不可靠	
	技术力量	现有力量程度 u_8	较强		一般（缺 5%）		不足（缺 20%）		很　差	
		培训计划可行性 u_9	很可行		可　行		较可行		不可行	
	通讯条件适应性	现有条件程度 u_{10}	很　好		较　好		一　般		较　差	
		条件改变的可能性 u_{11}	完全可能		可　能		较可能		不可能	
	领导支持程度 u_{12}		很支持		支　持		较支持		不支持	
物理设计费用比 $u_3' = u_{13}$			<0.1		0.1 ~ 0.2		0.2 ~ 0.4		≥0.4	

由于因素分有不同的层次，不能等同对待，要按它们各自所属层次分别处理.

确定评语集 $V=\{$一级，二级，三级，四级$\}=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

（2）因素层次和级别的划分 层次和级别的划分见表11-7.

（3）评判变换矩阵的建立

①由专家独立填写评判卡（表11-7）：填写时，根据所评方案的具体情况，在该栏的空格中打"√". "现有设备程度"，"现有技术力量程度"及"物理设计的费用比"，可由方案的研究者或主管部门提供数据或介绍情况.

②统计评判情况：把评判的结果统计汇总，填入表11-8，表中"逻辑设计对目标的保证度 u_1"一栏，表示30个参加评判的人中有20人认为设计对目标的保证度是一级的，10人认为是二级的，没有人认为是三级、四级的. 其余栏类同.

表11-8 评价结果统计表

因素	级别				因素	级别			
	一级	二级	三级	四级		一级	二级	三级	四级
u_1	20	10	0	0	u_8	0	0	0	30
u_2	15	10	5	0	u_9	5	15	10	0
u_3	10	15	5	0	u_{10}	5	20	5	0
u_4	10	15	5	0	u_{11}	5	15	10	0
u_5	5	20	5	0	u_{12}	0	5	20	5
u_6	0	0	30	0	u_{13}	30	0	0	0
u_7	5	20	5	0					

③建立 R：由评判统计表可求出对"逻辑设计对目标的保证度"单个因素的评价

$$B_1=\left(\frac{20}{30}, \frac{10}{30}, 0, 0\right)$$

$$=(0.7, 0.3, 0, 0)$$

其中各元素分母为参加评判的人数，分子是评价结果．类似可得

$B_2 = (0.5, 0.3, 0.2, 0)$，$B_3 = (0.3, 0.5, 0.2, 0)$，

$C_1 = (0.3, 0.5, 0.2, 0)$，$C_2 = (0.2, 0.6, 0.2, 0)$，

$D_1 = (0, 0, 1, 0)$，$D_2 = (0.2, 0.6, 0.2, 0)$，

$E_1 = (0, 0, 0, 1)$，$E_2 = (0.2, 0.5, 0.3, 0)$，

$F_1 = (0.2, 0.6, 0.2, 0)$，$F_2 = (0.2, 0.5, 0.3, 0)$，

$G = (0, 0.2, 0.6, 0.2)$，$H = (1, 0, 0, 0)$

于是有

$$R_{2_1} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{2_2} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{2_3} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{2_4} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

（4）**权重分配矩阵的确定**　应用二元择优比较法确定 A，A_1，A_2，A_{2_1}，A_{2_2}，A_{2_3}，A_{2_4}.

先求 A，即先对最高层因素 u'_1，u'_2，u'_3（u' 含义见表11-7），作统一的权衡，具体做法是：选取一定数目的专家（本例20人）独立填写择优试验卡（表11-9）．

表 11-9　择优试验卡

项　目	u'_1	u'_2	u'_3
u'_1		(6)	(3)
u'_2	(1)		(5)
u'_3	(4)	(2)	

表中序号(1) ~ (6) 表示填卡顺序. 当把因素 u_2' 与 u_1' 进行比较后，若认为 u_2' 比 u_1' 重要，就在（1）号空格的斜线下方划“√”，反之就在斜线上方划“√”，其余相同. 把择优结果统计汇总填入表 11-10.

表 11-10 因素择优次数表

项　　目	u_1'	u_2'	u_3'	Σ	Σ/总和
u_1'		34	27	61	0.5
u_2'	6		15	21	0.2
u_3'	13	25		38	0.3
总　　和				120	

由表 11-10 的最后一列可得 $A=(0.5,\ 0.2,\ 0.3)$，类似可求 $A_1=(0.4,\ 0.2,\ 0.4)$，$A_2=(0.3,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.2)$，$A_{2_1}=(0.7,\ 0.3)$，$A_{2_2}=(0.6,\ 0.4)$，$A_{2_3}=(0.3,\ 0.7)$，$A_{2_4}=(0.6,\ 0.4)$.

(5) 综合评判 由于

$$A_1\circ R_1=A_1\circ\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}=(0.4,0.2,0.4)\circ\begin{pmatrix}0.7&0.3&0&0\\0.5&0.3&0.2&0\\0.3&0.5&0.2&0\end{pmatrix}$$

$$=(0.4,\ 0.4,\ 0.2,\ 0)$$

$$A_{2_1}\circ R_{2_1}=(0.7\ ,0.3)\circ\begin{pmatrix}0.3&0.5&0.2&0\\0.2&0.6&0.2&0\end{pmatrix}$$

$$=(0.3,\ 0.5,\ 0.2,\ 0)$$

$$A_{2_2}\circ R_{2_2}=(0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0)$$

$$A_{2_3}\circ R_{2_3}=(0.2,\ 0.5,\ 0.3,\ 0.3)$$

$$A_{2_4}\circ R_{2_4}=(0.2,\ 0.6,\ 0.3,\ 0)$$

$$A_2 \circ R_2 = A_2 \circ \begin{pmatrix} A_{2_1} \circ R_{2_1} \\ \vdots \\ A_{2_4} \circ R_{2_4} \\ G \end{pmatrix}$$

$$= (0.3, 0.2, 0.2, 0.1, 0.2) \circ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= (0.3, 0.3, 0.2, 0.2)$$

$$B = A \circ \begin{pmatrix} A_1 \circ R_1 \\ A_2 \circ R_2 \\ H \end{pmatrix} = (0.5, 0.2, 0.3) \circ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (0.4, 0.4, 0.2, 0.2)$$

归一化　$B' = (0.3,\ 0.3,\ 0.2,\ 0.2)$

由 B'知，隶属于一级、二级的程度均为 0.3，隶属于三级、四级的程度都为 0.2，根据最大隶属原则，此方案是比较好的，可以实施，但尚有不足之处，实施前，还需修正完善.

11.5　模糊二阶决策

11.5.1　评判空间与评判函数

模糊二阶决策也是对多个因素所影响的方案进行决策的方法，其基本思想是在评判空间内，利用评判函数来进行决策．下面先介绍评判空间与评判函数的概念.

备择方案集和因素集分别记为

$$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$$

$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$$

给出映射 $R: S \times U \to [0, 1]$，$R = (r_{ij})_{n \times m}$ 称为评判矩阵，其中 $r_{ij} = R(s_i, u_j)$ 是方案 s_i 在因素 u_j 上的特性指标. 显然，s_i 的特性向量

$$R\Big|_{s_i} = (r_{i_1}, r_{i_2}, \cdots, r_{i_m}) \in [0,1]^m$$

可视为 U 中的模糊集.

我们把由备择方案集 S，因素集 U 及评判矩阵 R 组成的三元结构 (S, U, R) 称为评判空间.

若映射 f: $[0, 1]^m \to Y$（全体实数）是正则（即 $f(0, 0, \cdots, 0) = 0$）的，递增和连续的，则称为评判函数，记为

$$D = f(z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

下面是评判函数的三种具体形式：

(1) $D_1 = \sum_{j=1}^{m} a_j z_j \qquad (a_j \geqslant 0, j \leqslant m)$

(2) $D_2 = \bigvee_{j=1}^{m} (b_j \wedge z_j) \qquad (b_j \in [0,1], j \leqslant m)$

(3) $D_3 = \bigwedge_{j=1}^{m} z_j^{c_j} \qquad (c_j > 0, j \leqslant m)$

上述三种形式当 $a_j = 1/m$，$b_j = c_j = 1$（$j \leqslant m$）时，可简化为

$$D_1 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} z_j; \quad D_2 = \bigvee_{j=1}^{m} z_j; \quad D_3 = \bigwedge_{j=1}^{m} z_j$$

分别称为平均、最大、最小方法.

11.5.2 模糊二阶决策

利用评判空间和评判函数进行决策的一般步骤如下：

(1) 给出备择方案集 S.

(2) 找出因素集 U.

(3) 确定评判矩阵 R.

(4) 构造评判函数f.

(5) 计算评判指标：

$$D(s_i) = f(r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

最后将$D(s_1)$，$D(s_2)$，…，$D(s_n)$按大小排序，按序择优，即可得到最佳方案.

一般情况下，若仅仅取平均、最大、最小方法可能会产生片面性，因此，在计算出D_1，D_2，D_3之后，可将D_1，D_2，D_3作为新的因素集中的元素，利用它们再作一次评判. 这就是为什么把此方法称为模糊二阶决策的原因.

(6) 二次评价：

令 $U_0 = \{D_1, D_2, D_3\}$，$R_0 \in \mathscr{F}(S \times U_0)$，即

$$R_0 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{matrix}$$

其中$d_{i1} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}$，$d_{i2} = \bigvee_{j=1}^{m} r_{ij}$，$d_{i3} = \bigwedge_{j=1}^{m} r_{ij} (i = 1, 2, \cdots, n)$.

于是得到一个新的评判空间(S, U_0, R_0)，再对它作评判. 评判函数f可根据实际问题的需要和对它的要求，重新构造. 比如可令

$$f(D_1, D_2, D_3) = e_1 D_1 + e_2 D_2 + e_3 D_3 \qquad (e_j \geqslant 0, \quad j \leqslant 3)$$

计算$d_i = f(d_{i1}, d_{i2}, d_{i3})$，将$d_i (i = 1, 2, \cdots, n)$按大小排序，据序择优，便可得到最后决策.

例 11-7 图 11-2 中的哪一个图形最“圆”.

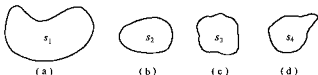


图 11-2 四个不规则图形

解 设 $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$，$U=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，其中

$$u_1 = \frac{4\pi A(s_i)}{L^2(s_i)}$$

式中的 $A(s_i)$ 为 s_i 的面积，$L(s_i)$ 为 s_i 的周长. 经计算得

$$r_{11}=0.9, \quad r_{21}=0.8, \quad r_{31}=0.7, \quad r_{41}=0.9$$

u_2 为 s_i 所包含的最大圆的面积与 s_i 的面积之比，其比分别为

$$r_{12}=0.6, \quad r_{22}=0.4, \quad r_{32}=0.8, \quad r_{42}=0.9$$

u_3 为 s_i 的面积与包含 s_i 的最小圆的面积之比，其比分别为

$$r_{13}=0.7, \quad r_{23}=0.4, \quad r_{33}=0.7, \quad r_{43}=0.6$$

u_4 为 s_i 是否是凸图形，用“1”表示 s_i 为凸，用“0”表示非凸，故有

$$r_{14}=0, \quad r_{24}=1, \quad r_{34}=1, \quad r_{44}=1$$

于是，得到评判矩阵

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0.4 & 0.4 & 1 \\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 1 \\ 0.9 & 0.9 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

从而得到评判空间(S, U, R). 又由简化公式有

$$d_{11} = \frac{(0.9+0.6+0.7+0)}{4} = 0.55$$

$$d_{12} = \max(0.9, 0.6, 0.7, 0) = 0.9$$

$$d_{13} = \min(0.9, 0.6, 0.7, 0) = 0$$

$$d_{21} = 0.65, \quad d_{22} = 1, \quad d_{23} = 0.4$$

$$d_{31} = 0.8, \quad d_{32} = 1, \quad d_{33} = 0.7$$

$$d_{41} = 0.85, \quad d_{42} = 1, \quad d_{43} = 0.6$$

所以
$$R_0 = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.9 & 0 \\ 0.65 & 1 & 0.4 \\ 0.80 & 1 & 0.7 \\ 0.85 & 1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

新的评判空间为(S, U_0, R_0)，其中$U_0 = \{D_1, D_2, D_3\}$，若令

$$d = f(D_1, D_2, D_3) = \frac{(D_1 + D_2 + D_3)}{3}$$

可得 $d_1 = 0.48$，$d_2 = 0.68$，$d_3 = 0.83$，$d_4 = 0.81$

从而判定s_3"最圆"，s_1"最不圆".

习 题 11

1. 农业生产方案的优选：设有三个农业生产方案x_1，x_2，x_3，方案的指标如下表：

经 济 指 标	x_1	x_2	x_3
亩产/斤	1850	1400	2150
每百斤产量费用/元	4.8	4.1	6.5
每亩用工/工	35	22	52
每亩纯收入/元	125	115	90
土壤肥力/级	4	4	2

对各指标赋以权重（0.25，0.25，0.1，0.2，0.2），按经济指标优劣，分别用评分法和 Blin 法对x_1，x_2，x_3排序.

2. 设 $U=\{a, b, c\}$，其中 a，b，c 均为几何图形，现考察 a、b、c 与另一几何图形 d 的相似情况. 已知若 a 与 b 比较，a 与 d 相似程度为 0.32，则 b 与 d 相似程度为 0.46；b 与 c 比较，b 与 d 相似程度为 0.40，则 c 与 d 相似程度为 0.64；c 与 a 比较，c 与 d 相似程度为 0.46，则 a 与 d 相似程度为 0.54. 试分别用模糊优先关系定序法、相对比较法、对比平均法（平权）按与图 d 最相似特性确定 a，b，c 的次序.

3. 城市绿化中，对 $U=\{u_1$（梧桐），u_2（垂柳），u_3（棕榈）$\}$ 选美. 通过二元对比，我们有下列比较级：

$$(f_{u_2}(u_1), f_{u_1}(u_2)) = (0.8, 0.7), (f_{u_3}(u_2), f_{u_2}(u_3)) = (0.8, 0.4),$$
$$(f_{u_1}(u_3), f_{u_3}(u_1)) = (0.5, 0.9).$$

试用相对比较法排出它们"美"的顺序.

4. 在对华南某些地区种植橡胶的适宜程度的综合评判中，取 $U=\{$年平均气温，年极端最低气温，年平均风速$\}$，$V=\{$很适宜，较适宜，适宜，不适宜$\}$. 根据 1960～1978 年历史资料，对南宁、万宁两地区的单因素评价矩阵为：

$$R_{南宁}=\begin{pmatrix} 0.42 & 0.58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.26 & 0.74 \\ 0 & 0.11 & 0.26 & 0.63 \end{pmatrix}, \quad R_{万宁}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.95 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

如果着眼权重分配为 $A=(0.19, 0.80, 0.01)$，那么，试分别对南宁，万宁两地区作一综合决策.

5. 在教学过程的综合评判中，取 $U=\{$清楚易懂，教材熟悉，生动有趣，板书整齐清楚$\}$，$V=\{$很好，较好，一般，不好$\}$. 设某班学生对教师的教学评判矩阵

$$R=\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

若考虑权重分配 $A=(0.5, 0.2, 0.2, 0.1)$，试求学生对这位教师的综合评判.

6. 对某产品质量作综合评判，考虑从四种因素来评价产品，$U=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，将产品质量分为四等 $V=\{$Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ$\}$，设单因素评判矩阵

$$R=\begin{pmatrix}0.3 & 0.6 & 0.1 & 0\\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix}$$

且设有两种对因素权重分配

$$A_1=(0.5,0.2,0.2,0.1),\quad A_2=(0.2,0.4,0.1,0.3)$$

试评价此产品按两种权重分配情况下，分别相对地属于哪级产品.

7. 某产品由9个因素组成，$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_9\}$，产品的质量分为四个等级，$Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$，9个因素按某种属性分为三组：$X_1=\{x_1, x_2, x_3\}$，$X_2=\{x_4, x_5, x_6\}$，$X_3=\{x_7, x_8, x_9\}$，它们所对应的单因素评判矩阵分别为：

$$R_1=\begin{pmatrix}0.36 & 0.24 & 0.13 & 0.27\\ 0.20 & 0.32 & 0.25 & 0.23\\ 0.40 & 0.22 & 0.26 & 0.12\end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix}0.30 & 0.28 & 0.24 & 0.18\\ 0.26 & 0.36 & 0.12 & 0.20\\ 0.22 & 0.42 & 0.16 & 0.10\end{pmatrix},$$

$$R_3=\begin{pmatrix}0.38 & 0.24 & 0.08 & 0.20\\ 0.34 & 0.25 & 0.30 & 0.11\\ 0.24 & 0.28 & 0.30 & 0.18\end{pmatrix}$$

设对 X_i 的因素权重分配为 A_i（$i=1, 2, 3$），且

$$A_1=(0.3,0.42,0.28),\quad A_2=(0.2,0.5,0.3),$$

$$A_3=(0.3,0.3,0.4)$$

把 $R=(A_1\circ R_1, A_2\circ R_2, A_3\circ R_3)^T$ 作为 $X=\{X_1, X_2, X_3\}$ 的单因素评判矩阵，若对 X_1, X_2, X_3 的权重分配为 $A=(0.2, 0.35, 0.45)$，试问该产品相对地属于什么等级.

第 12 章　模 糊 控 制

现代控制理论已经在工业控制和空间技术等很多方面取得成功的应用，其过程控制基于被控对象的精确的数学模型．但对于许多实际问题，比如在炼钢炉的冶炼过程、化工生产中的化学反应过程、工业锅炉的燃烧过程等等，系统具有不同程度的时变性、非线性及强耦合性等特点，建立此类过程的精确数学模型十分困难，甚至是办不到的．在这种情况下，富有经验的技术操作人员或专家却能够提供有意义的启发式规则和经验原则来进行有效的控制．为使机器能够模拟人的做法进行自动控制，必须将人的控制经验定量化，即数学化，并运用微机的程序来实现这些控制规则，这便产生了模糊控制的理论．

本章主要介绍模糊控制的基础理论及其基本原理和实现方法，并给出两个应用实例．

12.1　模糊语言的集合描述

所谓模糊语言，又称自然语言，其重要特点是它具有模糊性，即自然语言中某些词汇难以用定量化的方法确定它的外延．自然语言的这种模糊性是人类思维方式的特点，是人类解决复杂问题，表达复杂思想所必不可缺的．要想让计算机能模拟人脑思维，从而更多地代替人类执行思维推理、判断任务，就必须用数学语言对自然语言进行描述．将自然语言形式化，使其转化为计算机所能接受的算法语言．

12.1.1　模糊词

在自然语言中能够表达一个完整概念的最小单位称为原子单词．例如，天、地、黑、白、美、丑、快、慢等都是单词．为了

用集合描述单词，就要选定一个论域 U. 一类单词构成一个集合 T，语义通过从 T 到 U 的对应关系 $\underset{\sim}{N}$ 来表达，$\underset{\sim}{N}$ 是一个模糊关系. 对任一固定的单词 $a \in T$，记

$$\underset{\sim}{N}(a,u) = \underset{\sim}{A}(u)$$

$\underset{\sim}{A}$ 是 U 上的一个模糊子集，$\underset{\sim}{N}(a,u)$ 表示属于 T 的单词 a 与属于 U 的对象 u 之间关系的程度. 当 $\underset{\sim}{A}$ 是一个普通集合时，词 a 叫做明确的，否则叫做模糊的.

例如，为了用集合表示年龄这一概念，我们选取论域 $U = [0,200]$，"年老"与"年轻"分别可用 U 上的模糊集 $\underset{\sim}{O}$ 和 $\underset{\sim}{Y}$ 表示，其隶属函数分别为

$$\underset{\sim}{O}(u) = \begin{cases} 0, & 当 0 \leqslant u \leqslant 50 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 当 50 < u \leqslant 200 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{Y}(u) = \begin{cases} 1, & 当 0 \leqslant u \leqslant 25 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 当 25 < u \leqslant 200 \end{cases}$$

隶属函数曲线见图 12-1.

单词之间通过连接词"或""且"连接起来，或者在单词前面加"非"，均构成词组，如"亚非拉"、"中老年"、"非金属"等.

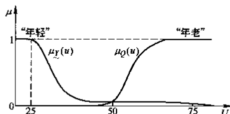


图 12-1 "年轻"与"年老"的隶属函数曲线

单词的这种逻辑组合对应于相应的集合运算，“或”对应∪，“且”对应∩，“非”对应 c.

例如：

$$[\text{亚非拉}] = [\text{亚}] \cup [\text{非}] \cup [\text{拉}]$$

$$[\text{中老年}] = [\text{中年}] \cup [\text{老年}]$$

$$[\text{红花}] = [\text{红}] \cap [\text{花}]$$

$$[\text{非金属}] = [\text{金属}]^c$$

当单词的集合描述确定之后，词组也可以用集合描述了. 例如

[年轻或年老]：

$$(\underset{\sim}{Y} \cup \underset{\sim}{O})(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant u \leqslant 25 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25 < u \leqslant 50 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50 < u \leqslant 200 \end{cases}$$

[非年轻]：

$$\underset{\sim}{Y}^c(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant u \leqslant 25 \\ 1 - \left[1 + \left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25 < u \leqslant 200 \end{cases}$$

12.1.2 模糊语言算子

在自然语言中有一些修饰词，置于某个词前面，会改变该单词的意义，把原来的单词变成一个新的词. 这些修饰词可看成一种算子，称为语言算子，下面介绍常用的三种算子.

12.1.2.1 语气算子

把“很”、“极”、“非常”、“特别”等词置于一个单词前面（如“很老”、“比较老”、“非常老”、“极老”……）便改变了

该词的肯定程度，这些词叫做语气算子.

语气算子定义为 $\mathscr{F}(U)$ 上的一种映射：

$$H_\lambda : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$$

$$(H_\lambda(\underset{\sim}{A}))(u) = [\underset{\sim}{A}(u)]^\lambda$$

其中 λ 为某一正实数，当 $\lambda > 1$ 时，H_λ 称为集中化算子，当 $\lambda < 1$ 时，H_λ 称为散漫化算子.

对不同的 λ，有不同的意义，如 H_2 叫"很"；H_4 叫"极"，$H_{0.5}$叫"有点"，$H_{0.25}$叫"稍微有点"等等. 例如

$$[\text{很老}](u) = H_2[\text{老}](u) = ([\text{老}](u))^2$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad \text{当} 0 \leqslant u \leqslant 50, \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-2} & , \quad \text{当} 50 < u \leqslant 200 \end{cases}$$

$$[\text{略老}](u) = H_{1/2}[\text{老}](u) = ([\text{老}](u))^{\frac{1}{2}}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad \text{当} 0 \leqslant u \leqslant 50, \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}} & , \quad \text{当} 50 < u \leqslant 200 \end{cases}$$

$$[\text{极老}](u) = H_4[\text{老}](u) = ([\text{老}](u))^4$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad \text{当} 0 \leqslant u \leqslant 50, \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-4} & , \quad \text{当} 50 < u \leqslant 200 \end{cases}$$

隶属函数曲线见图 12-2.

12.1.2.2 模糊化算子

将"大概"、"近似于"、"好像"等词置于一单词前面，把该词的意义模糊化，称为模糊化算子. 模糊化算子可以表示为论域 U 上的一个相似关系 $\underset{\sim}{E}$. 论域 $U = (-\infty, +\infty)$，一般 $\underset{\sim}{E}$ 选取

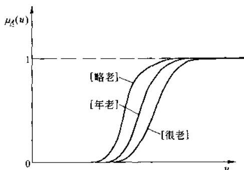


图 12-2　隶属函数曲线

为正态分布形式. 即:

$$\underset{\sim}{E}(u,v) = \begin{cases} e^{-(u-v)^2}, & 当 |u-v| < \delta \\ 0, & 当 |u-v| \geqslant \delta \end{cases}$$

式中 δ 为参数，其取值大小反映模糊化的程度.

设 $\underset{\sim}{A}$ 表示某一单词，经模糊化算子 F 的作用，得到一个用模糊集表示的单词:

$$(F(\underset{\sim}{A}))(u) \triangleq (\underset{\sim}{E} \circ \underset{\sim}{A})(u) = \bigvee_{v \in U} (\underset{\sim}{E}(u,v) \wedge \underset{\sim}{A}(v))$$

例如　　$A(u) = \begin{cases} 1, & u = 4 \\ 0, & u \neq 4 \end{cases}$

则有

$$(F(\underset{\sim}{A}))(u) = \bigvee_{v \in U} (\underset{\sim}{E}(u,v) \wedge \underset{\sim}{A}(v)) = \underset{\sim}{E}(u,4)$$

$$= \begin{cases} e^{-(u-4)^2}, & |u-4| < \delta \\ 0, & |u-4| \geqslant \delta \end{cases}$$

图 12-3 中 $A(u)$ 表示一个确定的数4,而$(F(\underset{\sim}{A}))(u)$ 则表示一个峰值为 4 的模糊数,它对应的词为"大约 4" 或记为 $\underset{\sim}{4}$.

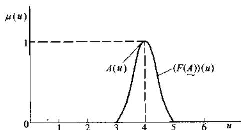


图 12-3　$A(u)$ 与 $(F(\underset{\sim}{A}))(u)$ 的曲线

12.1.2.3　判定化算子

"偏向"，"倾向于"，"多半是"等词也可以看成一种算子，使某一单词化模糊为肯定，对其模糊的描述给出粗糙的判断，这种算子称为判定化算子，记为 $P_a\left(0 < a \leq \dfrac{1}{2}\right)$. 这里

$$P_a(\underset{\sim}{A})(u) = d_a[\underset{\sim}{A}(u)]$$

其中 P_a 为判定化算子，d_a 为定义在[0,1]区间上的实函数.

$$d_a = \begin{cases} 0 \quad, & \text{当 } x \leq a \\ \dfrac{1}{2} \quad, & \text{当 } a < x \leq 1-a \\ 1 \quad, & \text{当 } x > 1-a \end{cases} \quad \left(0 < a \leq \frac{1}{2}\right)$$

例如，[年轻]的隶属函数为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) = \begin{cases} 1 \quad, & 0 \leq u \leq 25 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} \quad, & 25 < u \leq 200 \end{cases}$$

当 $u=30$ 时，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) = \dfrac{1}{2}$，则

$$[\text{倾向年轻}](u) = P_{\frac{1}{2}}[\text{年轻}](u) = d_{\frac{1}{2}}([\text{年轻}](u))$$

$$= \begin{cases} 0, & u > 30 \\ 1, & u \leq 30 \end{cases}$$

这里 $a = \dfrac{1}{2}$，算子 $P_{\frac{1}{2}}$ 叫做"倾向". 作用结果如图 12-4 所示.

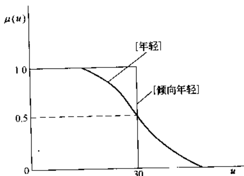


图 12-4　隶属函数曲线

12.1.3　语言值

自然语言中的一些词可以数量化，如“大”、“小”、“高”、“低”、“轻”、“重”等，以及加上语言算子扩大的词汇如“很大”、“不大”、“非常小”、“偏大”等都称为语言值. 它们都可以由实数域 R 或其子集为论域的模糊集合来表示.

例如，设 $U = \{1,2,3,\cdots,10\}$

$$[大] = \frac{0.2}{4} + \frac{0.4}{5} + \frac{0.6}{6} + \frac{0.8}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$[小] = \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.2}{5}$$

$$\begin{aligned}[很大] &= H_2[大] \\ &= \frac{0.04}{4} + \frac{0.16}{5} + \frac{0.36}{6} + \frac{0.64}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\end{aligned}$$

$$[倾向小] = P_{\frac{1}{2}}[小] = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$[不大也不小] = [大]^c \cap [小]^c$$

$$= \frac{0.2}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.6}{5} + \frac{0.4}{6} + \frac{0.2}{7}$$

语言值之间可以施行两种运算，其一是把它们看成 R 上的模糊子集而进行集合运算，其二是像模糊数那样，进行四则运算.

设 $\underset{\sim}{E}$、$\underset{\sim}{F}$ 为两个语言值，* 代表实数间的一种四则运算，规定 $\underset{\sim}{E}$、$\underset{\sim}{F}$ 之间的运算 * 如下：

$$\mu_{\underset{\sim}{E}*\underset{\sim}{F}}(z) = \bigvee_{x*y=z} (\mu_{\underset{\sim}{E}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{F}}(y))$$

例 12-1 设 $\underset{\sim}{E} = \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.2}{3}$, $\underset{\sim}{F} = \frac{0.2}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4}$,试求 $\underset{\sim}{E} * \underset{\sim}{F}$ 的四则运算.

$$\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{F} = \frac{1 \wedge 0.2}{1+2} + \frac{1 \wedge 0.8}{1+3} + \frac{1 \wedge 1}{1+4} + \frac{0.8 \wedge 0.2}{2+2} + \frac{0.8 \wedge 0.8}{2+3}$$

$$+ \frac{0.8 \wedge 1}{2+4} + \frac{0.2 \wedge 0.2}{3+2} + \frac{0.2 \wedge 0.8}{3+3} + \frac{0.2 \wedge 1}{3+4}$$

$$= \frac{1 \wedge 0.2}{3} + \frac{(1 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 0.2)}{4}$$

$$+ \frac{(1 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (0.2 \wedge 0.2)}{5}$$

$$+ \frac{(0.8 \wedge 1) \vee (0.2 \wedge 0.8)}{6} + \frac{0.2 \wedge 1}{7}$$

$$= \frac{0.2}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{0.2}{7}$$

同理

$$\underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{F} = \frac{1 \wedge 0.2}{1-2} + \frac{1 \wedge 0.8}{1-3} + \frac{1 \wedge 1}{1-4} + \frac{0.8 \wedge 0.2}{2-2} + \frac{0.8 \wedge 0.8}{2-3}$$

$$+ \frac{0.8 \wedge 1}{2-4} + \frac{0.2 \wedge 0.2}{3-2} + \frac{0.2 \wedge 0.8}{3-3} + \frac{0.2 \wedge 1}{3-4}$$

$$= \frac{1}{-3} + \frac{0.8}{-2} + \frac{0.8}{-1} + \frac{0.2}{0} + \frac{0.2}{1}$$

$$\underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{F} = \frac{1 \wedge 0.2}{1 \times 2} + \frac{1 \wedge 0.8}{1 \times 3} + \frac{1 \wedge 1}{1 \times 4} + \frac{0.8 \wedge 0.2}{2 \times 2} + \frac{0.8 \wedge 0.8}{2 \times 3}$$

$$+ \frac{0.8 \wedge 1}{2 \times 4} + \frac{0.2 \wedge 0.2}{3 \times 2} + \frac{0.2 \wedge 0.8}{3 \times 3} + \frac{0.2 \wedge 1}{3 \times 4}$$

$$= \frac{0.2}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{6} + \frac{0.8}{8} + \frac{0.2}{9} + \frac{0.2}{12}$$

$$\underset{\sim}{E} \div \underset{\sim}{F} = \frac{1}{1/4} + \frac{0.8}{1/3} + \frac{0.8}{1/2} + \frac{0.8}{2/3} + \frac{0.2}{3/4} + \frac{0.2}{1} + \frac{0.2}{3/2}$$

12.1.4 模糊语言变量

模糊语言变量的概念是由 Zadeh 首先提出的．当一个变量取数值时，可以用经典数学理论对其进行描述，称为数值变量．而当一个变量取自然语言中的词语为值时，称其为语言变量．前面已经指出对于语言值，我们可以用模糊集来描述这些词语，于是有如下定义：

语言变量可表征为四元组 (X,T,U,M)，其中：

（1）X 为语言变量的名称，比如天气温度．

（2）T 为语言变量 X 取值的术语集合，如 $T=$ {偏低，低，偏高}．

（3）U 是语言变量 X 取值的论域，如 $U=[-100,\ 100]$．

（4）M 是 X 取值的语义规则，即将 T 中的每个语言值和 U 中的模糊集连接起来的语义规则．

例如，以控制系统的误差作为语言变量 X，论域取 $U=[-6,\ +6]$．“误差”语言变量的原子单词有“大、中、小、零”，再考虑误差有正负的情况，并施加以适当的语气算子，则 $T(X)$ 可表示为

$T(X) = T($误差$) =$ 正很大 + 正大 + 正较大 + 正中 + 正较小

+ 正小 + 零 + 负小 + 负较小 + 负中

+ 负较大 + 负大 + 负很大.

12.2 模糊逻辑与模糊推理句

在普通逻辑中，用精确的数学方法描述推理过程，推理的前提和结论都是精确的，然而在现实中存在大量的模糊现象，需要人们根据模糊的前提作出合乎逻辑的结论. 人们常常用似然推理的方法来处理，似然推理也是模糊推理. 我们先来介绍模糊逻辑与模糊推理句.

12.2.1 模糊逻辑

考虑陈述句“张三是老人”，由于老人的概念是模糊的，因而“张三是老人”无确切的真假而言，但是它又有真假的含义，这种陈述句称为模糊命题. 模糊命题不是绝对的真和假，而是真假性有程度上的差别. 仿照模糊集隶属度的表示法，我们也给模糊命题赋予 [0, 1] 中的一个数，来表示其真假的程度.

设 $\mathscr{N}$ 是全体模糊命题的集合，令

$$T:\mathscr{N}\rightarrow[0,1]$$

$$n\mapsto T(n)\in[0,1]$$

$T(n)$ 称为模糊命题 n 的真值，区间 [0, 1] 称为命题的真值域.

例如，若命题 n 是“28 岁的人是年轻人”，则 $T(n)=0.7$；若命题 n 是“50 岁的人是年轻人”，则 $T(n)=0.04$.

模糊命题是普通命题的推广，而普通命题是模糊命题的特例.

设 U 是论域，$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$. 易见，$u_0$ 对模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度 $\underset{\sim}{A}(u_0)$，就是模糊命题“u_0 是 $\underset{\sim}{A}$”的真值 $T(n)$，即 $\underset{\sim}{A}(u_0)=T(n)$.

普通命题的逻辑演算可以扩充到模糊命题中来，设 $m、n\in\mathscr{N}$，$\mathscr{N}$ 中的逻辑演算有如下五种：

(1) “$\neg$”(非) $n \mapsto \neg n$,其真值为 $T(\neg n) = 1 - T(n)$.

(2) “$\vee$”(或) $(m,n) \mapsto m \vee n$,其真值为 $T(m \vee n) = T(m) \vee T(n)$.

(3) “$\wedge$”(且) $(m,n) \mapsto m \wedge n$,其真值为 $T(m \wedge n) = T(m) \wedge T(n)$.

(4) “$\rightarrow$”(蕴涵) $(m,n) \mapsto m \rightarrow n$,其真值为

$$
\begin{aligned}
T(m \rightarrow n) &= T((\neg m)) \vee (m \wedge n) \\
&= (1 - T(m)) \vee (T(m) \wedge T(n))
\end{aligned}
$$

(5) “$\leftrightarrow$”(等价) $(m,n) \mapsto m \leftrightarrow n$,其真值为

$$
\begin{aligned}
T(m \leftrightarrow n) &= T((m \rightarrow n) \wedge (n \rightarrow m)) \\
&= T(m \rightarrow n) \wedge T(n \rightarrow m)
\end{aligned}
$$

例 12-2 设 m 和 n 分别是命题“学生赵六有病”和“赵六爱睡懒觉”,且 $T(m) = 0.8$,$T(n) = 0.5$,于是命题“赵六旷课”的真值 $T(m \vee n) = 0.8$.

例 12-3 设 m 和 n 分别是命题“明天天晴”和“明天有小阵雨”,且 $T(m) = 0.9$,$T(n) = 0.2$. 于是命题“明天天晴且有小阵雨”的真值 $T(m \wedge n) = 0.2$.

例 12-4 设 m 和 n 分别是命题“张三学习刻苦”和“张三学习好”,且 $T(m) = 0.8$,$T(n) = 0.7$. 于是“若张三学习刻苦,则张三学习好”的真值

$$T(m \rightarrow n) = (1 - 0.8) \vee (0.8 \wedge 0.7) = 0.7$$

12.2.2 模糊推理句

在推理句 $(a \rightarrow b)$ 中,如果 a、b 表示模糊概念,则称这种推理句为模糊推理句,如“若 u 是高个,则 u 一定很重”就是一个模糊推理句.

设 (a)、(b) 的真域是 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$,则规定

$\underset{\sim}{R} \triangleq \underset{\sim}{A}^c \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})$ 为 $(a \rightarrow b)$ 的真域,其隶属函数为

$$\underset{\sim}{R}(u) = (1 - \underset{\sim}{A}(u)) \vee (\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u))$$

定义 12-1 在论域U上给定模糊推理句$(a \to b)$，及$u_0 \in U$，若$T((a \to b)(u_0)) > \frac{1}{2}$，则称$u_0$对$(a \to b)$偏真，若$T((a \to b)(u_0)) < \frac{1}{2}$，则称$(a \to b)$对$u_0$偏假.

定义 12-2 如果对$\forall u \in U$，都有$T((a \to b)(u)) > \frac{1}{2}$，则称$(a \to b)$为模糊定理，简称$F$-定理.

F-定理是模糊推理的理论依据，可得如下模糊推理规则：

定理 12-1 在模糊演绎推理中，假言推理规则为：若（$a \to b$）为F-定理，且（a）对u偏真，则（b）对u偏真，而且

$$T((b)(u)) \geqslant T((a \to b)(u))$$

证 因为(a)对u偏真，故$T((a)(u)) = \underset{\sim}{A}(u) > \frac{1}{2}$，从而$1 - \underset{\sim}{A}(u) < \frac{1}{2}$.

因为（$a \to b$）为F-定理，故

$$T((a \to b)(u)) = (1 - \underset{\sim}{A}(u)) \vee (\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u)) > \frac{1}{2}$$

从而

$$T((a \to b)(u)) = \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u) > \frac{1}{2}$$

所以

$$T((b)(u)) = \underset{\sim}{B}(u) > \frac{1}{2}$$

显然

$$T((b)(u)) = \underset{\sim}{B}(u) \geqslant \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u) = T((a \to b)(u))$$

定理 12-2 模糊推理的拒取式为：若$(a \to b)$是F-定理，且(b)对u偏假，则(a)对u偏假，而且

$$T((a)(u)) = 1 - T((a \to b)(u))$$

证 由$T((a \to b)(u)) = (1 - \underset{\sim}{A}(u)) \vee (\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u)) > \frac{1}{2}$,及$T((b)(u)) = \underset{\sim}{B}(u) < \frac{1}{2}$知,$T((a \to b)(u)) = 1 - \underset{\sim}{A}(u) > \frac{1}{2}$,从而$\underset{\sim}{A}(u) < \frac{1}{2}$,这说明$(a)$对$u$偏假.

定理 12-3 模糊推理的合成规则为:

若$(a \to b)$和$(b \to c)$都是F-定理,则$(a \to c)$是F-定理,且对任意$u \in U$,有

$$T((a \to c)(u)) \geqslant T((a \to b)(u)) \wedge T((b \to c)(u))$$

证 对任意$u \in U$,$T((a \to c)(u)) = (1 - \underset{\sim}{A}(u)) \vee (\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{C}(u))$由已知

$$T((a \to b)(u)) = (1 - \underset{\sim}{A}(u)) \vee (\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u)) > \frac{1}{2}$$

$$T((b \to c)(u)) = (1 - \underset{\sim}{B}(u)) \vee (\underset{\sim}{B}(u) \wedge \underset{\sim}{C}(u)) > \frac{1}{2}$$

(1) 若 $\underset{\sim}{A}(u) > \frac{1}{2}$,则 $1 - \underset{\sim}{A}(u) < \frac{1}{2}$,且

$T((a \to b)(u)) = \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u) > \frac{1}{2}$,从而$\underset{\sim}{B}(u) > \frac{1}{2}$,类似地可推出$\underset{\sim}{C}(u) > \frac{1}{2}$,故$T((a \to c)(u)) = \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{C}(u) > \frac{1}{2}$,由定义,$(a \to c)$是$F$-定理.

此时,$\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{C}(u) \geqslant (\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u)) \wedge (\underset{\sim}{B}(u) \wedge \underset{\sim}{C}(u))$

$$= T((a \to b)(u)) \wedge T((b \to c)(u))$$

(2) 若 $\underset{\sim}{A}(u) < \frac{1}{2}$,则$1 - \underset{\sim}{A}(u) > \frac{1}{2}$,$\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u) < \frac{1}{2}$,$\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{C}(u) < \frac{1}{2}$.且$T((a \to b)(u)) = 1 - \underset{\sim}{A}(u)$,

$$T((a \to c)(u)) = 1 - A(u) > \frac{1}{2}$$

故 $(a \to c)$ 是 F-定理，且

$$T((a \to c)(u)) = 1 - \underset{\sim}{A}(u) = T((a \to b)(u))$$

$$\geqslant T((a \to b)(u)) \wedge T((b \to c)(u))$$

(3) 若 $\underset{\sim}{A}(u) = \frac{1}{2}$，则 $1 - \underset{\sim}{A}(u) = \frac{1}{2}$，

$$T((a \to b)(u)) = (1 - \underset{\sim}{A}(u)) \vee (\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u))$$

$$= \frac{1}{2} \vee \left(\frac{1}{2} \wedge \underset{\sim}{B}(u)\right) = \frac{1}{2}$$

但这与 $(a \to b)$ 是 F-定理矛盾，故 $A(u) = \frac{1}{2}$ 是不可能的.

所以
$$\underset{\sim}{A}(u) \neq \frac{1}{2}$$

12.2.3 在不同论域上的模糊推理句

在推理句 $(a(u) \to b(v))$ 中，即"若 u 是 a，则 v 是 b"涉及两个变量 u 和 v，它们可以属于不同的论域 U 和 V. a，b 可以是模糊概念，此时 a，b 的真域分别是 U 和 V 上的模糊集 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$. 我们规定 $(a(u) \to b(v))$ 的真域为

$$\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{A}^c \times V) \cup (\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}) \in \mathscr{F}(U \times V)$$

其隶属函数为

$$\underset{\sim}{R}(u,v) = (1 - \underset{\sim}{A}(u)) \vee (\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(v))$$

以 $(a(u) \to b(v))$ 为依据的模糊演绎推理规则也是成立的，即有以下三个定理：

定理 12-4 假言推理规则：若 $(a(u) \to b(v))$ 对 (u,v) 偏

真，且 (a) 对 u 偏真，则 (b) 对 v 偏真，并且有

$$T((b)(u)) \geqslant T((a(u) \rightarrow b(v))(u,v))$$

定理 12-5 拒取式规则：若 $(a(u) \rightarrow b(v))$ 对 (u,v) 偏真，且 (b) 对 v 偏假，则 (a) 对 u 偏假，而且

$$T((a)(u)) = 1 - T((a(u) \rightarrow b(v))(u,v))$$

定理 12-6 合成规则：若 $(a(u) \rightarrow b(v))$ 对 (u,v) 偏真，且 $(b(v) \rightarrow c(w))$ 对 (v,w) 偏真，则 $(a(u) \rightarrow c(w))$ 对 (u,w) 偏真，并且有

$$T((a(u) \rightarrow c(w))(u,w))$$
$$\geqslant T((a(u) \rightarrow b(v))(u,v)) \wedge T((b(v) \rightarrow c(w))(v,w))$$

以上三个定理的证明类似于定理 12-1、定理 12-2、定理 12-3 的证明，留给读者作为练习.

例 12-5 设 $U = \{1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0\}$ 表示某地区男子身高的论域，单位为米（m）. $V = \{40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ 为体重论域，单位为 kg. 又设"高"、"重"的集合表示为

$$[\text{高}] = \frac{0}{1.5} + \frac{0.2}{1.6} + \frac{0.7}{1.7} + \frac{0.9}{1.8} + \frac{1}{1.9} + \frac{1}{2.0}$$

$$[\text{重}] = \frac{0.2}{50} + \frac{0.6}{60} + \frac{0.8}{70} + \frac{0.95}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}$$

求模糊推理句"若 u 很高，则 v 很重"的真域 $\underset{\sim}{R}$.

解："u 很高"的真域

$$\underset{\sim}{A} = [\text{很高}] = H_2[\text{高}]$$

$$= \frac{0}{1.5} + \frac{0.04}{1.6} + \frac{0.49}{1.7} + \frac{0.81}{1.8} + \frac{1}{1.9} + \frac{1}{2.0}$$

或 $\qquad \underset{\sim}{A} = (0, 0.04, 0.49, 0.81, 1, 1)$

"v 很重" 的真域:

$$\underset{\sim}{B} = [\text{很重}] = H_2[\text{重}]$$

$$= \frac{0.04}{50} + \frac{0.36}{60} + \frac{0.64}{70} + \frac{0.9}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}$$

或 $\underset{\sim}{B} = (0, 0.04, 0.36, 0.64, 0.9, 1, 1)$

$\underset{\sim}{A}^c = (1, 0.96, 0.51, 0.19, 0, 0)$

$$\underset{\sim}{A}^c \times V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.96 \\ 0.51 \\ 0.19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 \\ 0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 \\ 0.19 & 0.19 & 0.19 & 0.19 & 0.19 & 0.19 & 0.19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.04 \\ 0.49 \\ 0.81 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 0.04, 0.36, 0.64, 0.9, 1, 1)$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 \\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.49 & 0.49 & 0.49 & 0.49 \\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.81 & 0.81 & 0.81 \\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.9 & 1 & 1 \\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.9 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{A}^c \times V) \cap (\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B})
$$

$$
=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 \\
0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 \\
0.19 & 0.19 & 0.36 & 0.64 & 0.81 & 0.81 & 0.81 \\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.9 & 1 & 1 \\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.9 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

如果 $(u,v) \in \underset{\sim}{R}_{0.5}$，即 $(a(u) \rightarrow b(v))$ 对 (u,v) 偏真，则称(u, v)满足相容性条件.

这里

$$
\underset{\sim}{R}_{0.5} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{matrix}
$$

从中可以看出(u_4, v_1)，(u_4, v_2)，(u_4, v_3)，(u_5, v_1)，……，有9组不符合相容性条件，我们可以认为他们身高体重不相称.

12.3 似然推理与条件语句

12.3.1 似然推理

推理是思维的基本形式之一，形式逻辑为人们提供了严谨而又十分有效的"三段论"推理模式. 即若P则q，P真$\Rightarrow q$真. 但在实际生活中，人们常用一种近似推理的方法，如以"若u大，则v小"为依据，由u很大推测v很小，由u略大推测v略小等，这种推理方法叫似然推理.

似然推理：设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U), \underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(V)$，已知模糊蕴涵"若 $\underset{\sim}{A}$ 则 $\underset{\sim}{B}$"，由"若 $\underset{\sim}{A}$ 则 $\underset{\sim}{B}$"确定模糊关系 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times V)$.

(1) 若 $\underset{\sim}{A}_1 \in \mathscr{F}(U)$，则推出 $\underset{\sim}{B}_1 \in \mathscr{F}(V)$，使 $\underset{\sim}{B}_1 = \underset{\sim}{A}_1 \circ \underset{\sim}{R}$，其隶属函数为

$$\underset{\sim}{B}_1(v) = \bigvee_{u \in U} (\underset{\sim}{A}_1(u) \wedge \underset{\sim}{R}(u,v))$$

(2) 若 $\underset{\sim}{B}_2 \in \mathscr{F}(V)$，则推出 $\underset{\sim}{A}_2 \in \mathscr{F}(U)$，使 $\underset{\sim}{A}_2 = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{B}_2$，其隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}_2(u) = \bigvee_{v \in V} (\underset{\sim}{R}(u,v) \wedge \underset{\sim}{B}_2(v))$$

特别地，当论域U和V为有限时，似然推理可借助模糊矩阵的乘积来进行.

似然推理的作用好比一个变换器，可以用图12-5表示.

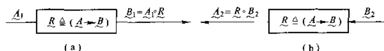


图12-5 似然推理框图

例 12-6 设论域 $U=V=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$[小] = \underset{\sim}{A} = \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2}$$

$$[较小] = \underset{\sim}{A}' = \frac{1}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.2}{3}$$

$$[大] = \underset{\sim}{B} = \frac{0.5}{4} + \frac{1}{5}$$

已知“若 u 小，则 v 大”，若 u 较小，v 如何？

解： 推理句“若 u 小，则 v 大”的真域，即模糊关系

$$\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{A}^c \times V) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,1,1,1,1) \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0, 0, 0, 0.5, 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\underset{\sim}{B}' = \underset{\sim}{A}' \circ \underset{\sim}{R} = (1, 0.4, 0.2, 0, 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= (0.4, 0.4, 0.4, 0.5, 1)
$$

模糊集 $\underset{\sim}{B}'$近似地表示“较大或偏小”.

12.3.2 条件语句

“若 u 是 a 则 v 是 b，否则 v 是 c”，这样的推理句叫条件句，记为$((a)\to(b),\ \neg(a)\to(c))$. 设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，$\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{C} \in \mathscr{F}(V)$ 分别表示判断句 (a)、(b)、(c) 的真域，下面我们由 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{C}$ 构造条件句$((a)\to(b),\neg(a)\to(c))$的真域 $\underset{\sim}{R}$.

当A、B、C为普通集合时，普通推理句“若 u 是 a 则 v 是 b，否则 v 是 c”的真域显然为（图 12-6）.

$$
R = (A \times B) \cup (A^c \times C)
$$

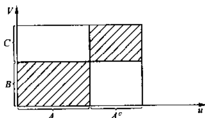


图 12-6

因此，当 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}$ 为模糊集时，模糊推理句$((a)\to(b),\ \neg(a)\to(c))$的真域我们定义为

$$\underset{\sim}{R} = (\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A}^c \times \underset{\sim}{C})$$

其隶属函数为

$$\underset{\sim}{R}(u,v) = (\underset{\sim}{A}(u) \times \underset{\sim}{B}(v)) \vee ((1 - \underset{\sim}{A}(u)) \wedge \underset{\sim}{C}(v))$$

将 $\underset{\sim}{R}$ 作为转换器，输入 $\underset{\sim}{A}'$，可得输出：

$$\underset{\sim}{B}' = \underset{\sim}{A}' \circ \underset{\sim}{R}$$

例 12-7 设论域 $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，若 x 轻则 y 重．否则 y 不很重，已知 x 很轻，问 y 如何？而

$$A(\text{轻}) = (1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2)$$

$$A^*(\text{很轻}) = (1, 0.64, 0.36, 0.16, 0.04)$$

$$B(\text{重}) = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$$

$$C(\text{不很重}) = (0.96, 0.84, 0.64, 0.36, 0)$$

解 由$(A \times B)(u, v) = A(u) \wedge B(v)$

$$(A^c \times C)(u,v) = (1 - A(u)) \wedge C(v)$$

得

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$A^c \times C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.36 & 0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.36 & 0 \\ 0.8 & 0.8 & 0.64 & 0.36 & 0 \end{pmatrix}$$

于是 $R=(A\times B)\cup(A^c\times C)$

$$=\begin{pmatrix}0.2&0.4&0.6&0.8&1\\0.2&0.4&0.6&0.8&0.8\\0.4&0.4&0.6&0.6&0.6\\0.6&0.6&0.6&0.4&0.4\\0.8&0.8&0.64&0.36&0.2\end{pmatrix}$$

从而 $B=A^*\circ R=(1,0.64,0.36,0.16,0.04)\circ$

$$\begin{pmatrix}0.2&0.4&0.6&0.8&1\\0.2&0.4&0.6&0.8&0.8\\0.4&0.4&0.6&0.6&0.6\\0.6&0.6&0.6&0.4&0.4\\0.8&0.8&0.64&0.36&0.2\end{pmatrix}$$

$$=(0.36,0.4,0.6,0.8,1)$$

故 y 是近似于重，而不是重.

12.3.3 多重条件语句

所谓多重条件语句是指这样的推理句：

"若 u 是 a_1，则 v 是 b_1，否则（若 u 是 a_2 则 v 是 b_2，否则（……，否则（若 u 是 a_n，则 v 是 b_n）……））." 或 "若 u 是 a_1，则 v 是 b_1；若 u 是 a_2，则 v 是 b_2；…；若 u 是 a_n，则 v 是 b_n".

这种推理句用记号

$((a_1)\to(b_1),(a_2)\to(b_2),\cdots,(a_n)\to(b_n))$ 表示.

设 (a_1)，(a_2)，…，(a_n) 的真域分别是 $\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，…，$\underset{\sim}{A}_n\in\mathscr{F}(U)$，$(b_1)$，$(b_2)$，…，$(b_n)$ 的真域分别是 $\underset{\sim}{B}_1$，$\underset{\sim}{B}_2$，…，$\underset{\sim}{B}_n\in\mathscr{F}(V)$，则多重条件语句的真域为

$$\underset{\sim}{R}\triangleq(\underset{\sim}{A}_1\times\underset{\sim}{B}_1)\cup(\underset{\sim}{A}_2\times\underset{\sim}{B}_2)\cup\cdots\cup(\underset{\sim}{A}_n\times\underset{\sim}{B}_n)$$

$\underset{\sim}{R}$ 同样也诱导出 $\mathscr{F}(U)$ 到 $\mathscr{F}(V)$ 的对应. 即若给出输入 $\underset{\sim}{A}'$，则有输出 $\underset{\sim}{B}'$，即

$$\underset{\sim}{B}' = \underset{\sim}{A}' \circ \underset{\sim}{R}$$

12.4 模糊控制的基本原理

12.4.1 模糊控制的基本思想

我们知道控制系统的核心是控制规则，常规控制系统的控制规则一般是由状态方程和传递函数表示的. 状态方程常采用的形式是代数方程组、微分方程组、积分方程组或它们的各种混合. 但对于现实问题中那些时变的、非线性的且带有模糊性的系统（称为模糊系统），要搞清它们的结构以找到误差较小的方程和函数作为数学表达是比较困难的，甚至是不可能的. 比如，在冶金、化工、人文、经济等系统中要获得正确的数学模型是十分不易的，但这些过程中却具有大量的以定性的形式得到的极重要的先验信息，以及仅仅是语言上规定的性能指标. 同时还要求过程操作人员是系统的基本组成部分，对于诸如这类的控制问题，用常规控制方法显然是很难实现的，但由人来进行控制却往往容易做到. 这是因为过程操作人员的控制方法是建立在直观的和经验的基础上，他凭借实践积累的经验，见微知著，采取适当的对策完成的. 比如，我们都有这样的经验，拧开水阀向水桶里放水时，当桶里没有水或水较少时，应开大水阀门；当桶里的水比较多时，水阀门应拧小点儿；当桶里水快满时，应将阀门拧得很小；当桶里的水一满，应迅速关掉阀门. 在此过程中，人的经验起了决定性的作用. 所以就能把人的控制经验归纳成为定性描述的一组条件语句，然后利用模糊集理论将它们定量化，使控制得以接受人的经验，模仿人的操作策略，这样就产生了模糊控制器. 利用模糊控制器对系统进行控制，就是所谓的模糊控制. 模糊控制避开了构造精确的状态方程和传递函数. 因此，很容易被有一定操

作经验而又不熟悉控制论的人学会和掌握，易于使用语言进行人机对话，以便更好地提供控制动作.

12.4.2 模糊控制的基本原理

为了帮助理解模糊控制的原理，我们先来介绍一个简单的单输入单输出的控制系统，即关于水位的模糊控制.

现有一个贮水容器，水位 x 由于某种原因而不断变动，调节阀 a 可向容器内注水或向外排水（见图 12-7）．试设计一个控制器，通过 a 将水位控制在 o 点附近.

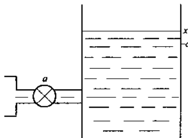


图 12-7 注水容器示意图

首先，当人工手动控制时，操作者要不断地观察水位 x，看它与设定水位 o 的偏差如何．在人的脑子里，对偏差的描述往往用“正大”（偏差为正而且值很大）、“正小”、“零”、“负大”（偏差为负而且很大）等这些模糊概念．操作者根据偏差的状态调节阀门，对水位进行控制，控制的策略大致如下：

若水面高于 o 点，则排水，差值越大，排水越快；

若水面低于 o 点，则注水，差值越大，注人越快；

若水面位于 o 点，则关闭阀门，不排水也不注水；

……

以上的控制策略称为控制规则，它是用语言形式表达的，因而具有模糊性．我们观察得到的水位 x 及偏差 e，都是具体的数

值，为了应用上面的规则，就需要将这些数值转换为“正大”、“负小”等语言形式．在模糊控制中，这个过程就称为输入量的模糊化，将模糊化了的输入应用于控制规则可得到“快排水”“慢注水”等语言形式的输出，即模糊输出．为了实现对水位的控制，就需要根据模糊输出确定控制量的具体数值，即执行量（开关阀门的大小）．由模糊输出确定执行量的过程称为输出量的非模糊化．

根据以上分析，我们将其主要步骤分别叙述如下．

12.4.2.1　确定输入变量和输出变量

在此将水位 x 与设定水位 o 之间的偏差 e 作为模糊控制器的输入变量．其输出变量为开关阀门 u 的变化，u 的变化直接控制对阀门的调节，又称输出变量为控制量．这种控制器称为单输入单输出的模糊控制器．

若为了改进控制器的性能，通常把偏差 e 与偏差的变化率 $\dot{e}$ 作为输入，这种控制器称为双输入单输出的模糊控制器．

12.4.2.2　输入变量及输出变量的模糊语言描述

对输入变量及输出变量的描述通常可选取如下词语：

{负大，负小，零，正小，正大}

我们可以将其看作某个论域上的模糊子集．通常采用如下简记形式：

NB = 负大，NS = 负小，O = 零，PS = 正小，PB = 正大．

其中　N = Negative，P = Positive，B = Big，S = Small，O = Zero．

设误差 e 的论域为 X，并将误差量化为七个等级，分别表示为 -3，-2，-1，0，$+1$，$+2$，$+3$，则有：

$$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

选控制量 u 的论域为 Y，并同 X 一样也把控制量量化为七个等级，即

$$Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

图 12-8 给出了语言变量的隶属函数曲线，由此可以得到

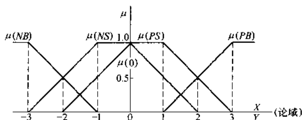


图 12-8 语言变量的隶属函数

表 12-1模糊变量 e 及 u 的赋值表.

表 12-1 模糊变量（e, u）的赋值表

隶属度 \ 量化等级 语言变量	-3	-2	-1	0	1	2	3
PB	0	0	0	0	0	0.5	1
PS	0	0	0	0	1	0.5	0
O	0	0	0.5	1	0.5	0	0
NS	0	0.5	1	0	0	0	0
NB	1	0.5	0	0	0	0	0

12.4.2.3 模糊控制规则的语言描述

根据手动控制策略，模糊控制规则可归纳如下：

(1) 若 e 负大，则 u 正大；

(2) 若 e 负小，则 u 正小；

(3) 若 e 为零，则 u 为零；

(4) 若 e 正小，则 u 负小；

(5) 若 e 正大，则 u 负大.

或用英文形式记为

(1) if $e = PB$ then $u = PB$; or

(2) if $e = NS$ then $u = PS$; or

(3) if $e = 0$ then $u = 0$; or

(4) if $e = PS$ then $u = NS$; or

(5) if $e = PB$ then $u = NB$.

也可以用表格形式描述控制规则，表 12-2 也称为控制规则表.

表 12-2 控制规则表

e	NB	NS	O	PS	PB
u	PB	PS	O	NS	NB

12.4.2.4 模糊控制规则的矩阵形式

上述规则实际上是一组多重条件语句，它可以表示为从误差论域 X 到控制量论域 Y 的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$. 当论域为有限时，模糊关系可以用矩阵来表示，其计算公式为：

$$\underset{\sim}{R} = (NB_e \times PB_u) + (NS_e \times PS_u) + (O_e \times O_u) + (PS_e \times NS_u) + (PB_e \times NB_u)$$

其中 $NB_e \times PB_u = (1, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0)^T \times (0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 1)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$NS_e \times PS_u = (0, 0.5, 1, 0, 0, 0, 0)^T \times (0, 0, 0, 0, 1, 0.5, 0)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O_e \times O_u = (0,0,0.5,1,0.5,0,0)^T \times (0,0,0.5,1,0.5,0,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PS_e \times NS_u = (0,0,0,0,1,0.5,0)^T \times (0,0.5,1,0,0,0,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PB_e \times NB_u = (0,0,0,0,0,0.5,1)^T \times (1,0.5,0,0,0,0,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将上面的5个矩阵求并，即对应元素取大，便得到模糊规则

的矩阵表达式为

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0.5&1\\0&0&0&0&0.5&0.5&0.5\\0&0&0.5&0.5&1&0.5&0\\0&0&0.5&1&0.5&0&0\\0&0.5&1&0.5&0.5&0&0\\0.5&0.5&0.5&0&0&0&0\\1&0.5&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

12.4.2.5　模糊决策

对于输入变量误差的模糊向量 $\underset{\sim}{e}$，经推理合成运算

$$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{e}\circ\underset{\sim}{R}$$

就得到控制量 $\underset{\sim}{u}$. 当取 $\underset{\sim}{e}=PS$ 时，则有

$$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{e}\circ\underset{\sim}{R}=(0,0,0,0,1,0.5,0)\circ\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0.5&1\\0&0&0&0&0.5&0.5&0.5\\0&0&0.5&0.5&1&0.5&0\\0&0&0.5&1&0.5&0&0\\0&0.5&1&0.5&0.5&0&0\\0.5&0.5&0.5&0&0&0&0\\1&0.5&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=(0.5,0.5,1,0.5,0.5,0,0)$$

12.4.2.6　将控制量的模糊量精确化

上面求出的输出变量 $\underset{\sim}{u}$ 是一个模糊集，要化为确定值才能实行控制，即明确选取哪一级别来调节阀门 a，这就需要进行模糊判决.

按照最大隶属度原则，应选 u 为 -1 级，即水位偏高时，应加快排水.

由上例可知，其实现过程是这样的，微机经中断采样获取被控制量的精确值，然后将此量与给定值比较得到误差，再将误差 e 的精确量进行模糊量化变成模糊量 $\underset{\sim}{e}$. 根据推理的合成规则，由 $\underset{\sim}{e}$ 和模糊控制规则 $\underset{\sim}{R}$ 进行决策，得到模糊控制量为：

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{e} \circ \underset{\sim}{R}$$

为了对被控对象施加精确的控制，还需要将模糊量 $\underset{\sim}{u}$ 转换为精确量，这一步骤称为非模糊化处理，得到精确的数字控制量后，施加到被控对象上进行控制. 然后，中断等待第二次采样，这样循环下去，就可实现对被控对象的模糊控制. 模糊控制的原理用框图表示，见图 12-9.

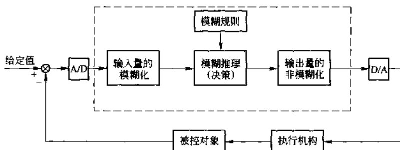


图 12-9 模糊控制原理框图

其中虚线部分为模糊控制器，它是模糊控制系统的核心.

综上所述，模糊控制算法可概括为下述四个步骤：

(1) 根据本次采样得到的系统输出值，计算所选择系统的输入变量；

(2) 将输入变量的精确值变为模糊量；

(3) 根据输入变量的模糊量及模糊控制规则，由模糊推理

合成规则计算控制量；

（4）将上述控制量计算为精确的控制量.

12.5 模糊控制器的设计

从图 12-9 可以看出，模糊控制器主要由输入模糊化、模糊推理决策、输出非模糊化三部分组成. 在进行模糊控制器的设计时，主要考虑以下几个方面.

12.5.1 模糊控制器结构设计

模糊控制器的结构设计是指确定模糊控制器的输入变量和输出变量. 通常将模糊控制器输入变量的个数称为模糊控制器的维数. 我们这里仅考虑单输出的情形，即输出变量只有一个. 对于多输出的情形，可以通过模糊系统的解耦分解成单输出系统进行设计和控制.

对于输入变量的选取一般有三个，即误差 E、误差的变化 EC、误差的变化的变化 ECC，输出变量一般选择控制量的变化 C. 关于模糊控制器的结构如图 12-10 所示.

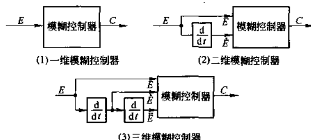


图 12-10 模糊控制器的结构

一般情况下，一维模糊控制器用于一阶被控对象. 由于这种控制器输入变量只选误差一个，只要误差相同，则不管目前误差是在快速增加还是在快速减小，采取的控制行为都是相同的，这

必然导致控制性能变差．由于二维模糊控制器同时考虑到误差和误差变化的影响，因此在性能上一般优于一维模糊控制器．实际上，目前被广泛采用的均为二维模糊控制器．

从理论上讲，模糊控制器的维数越高，控制越精细．当输入变量大于 2 个时，就称之为多维模糊控制器．但是由于维数的增加，控制规则变得过于复杂，控制算法的实现相当困难．正因为如此，多维控制器在控制系统中并不常用．

12.5.2 模糊规则的确定

模糊规则的确定过程可简单分成三部分，即选择适当的模糊语言变量，确定各语言变量的隶属函数，最后建立模糊控制规则．

12.5.2.1 模糊语言变量的确定

模糊规则是由若干语言变量构成的模糊条件语句，它们反映了人类的某种思维方式．例如，人在描述车速时，常用“快”、“较快”、“很快”、“慢”、“较慢”等词汇．由于人们在正、负两个方向的判断基本上是对称的，将大、中、小再加上正、负两个方向并考虑变量的零状态，共有七个词汇，即

{负大，负中，负小，零，正小，正中，正大}

一般用英文缩写为

$$\{NB,\ NM,\ NS,\ O,\ PS,\ PM,\ PB\}$$

选择较多的词汇描述输入、输出变量，可使制定控制规则方便，但是控制规则相应变得复杂．选择词汇过少，使得描述变量变得粗糙，导致控制器的性能变坏．一般情况下均选择上述七个词汇．

对于误差的变化这个输入变量，选择描述其状态的词汇时，常常将“零”分为“正零”与“负零”，这样的词集变为

{负大，负中，负小，负零，正零，正小，正中，正大}

$$\{NB,\ NM,\ NS,\ NO,\ PO,\ PS,\ PM,\ PB\}$$

下面对于模糊概念的确定就直接转化为求取模糊集合的隶属函数.

12.5.2.2　确定语言值的隶属函数

模糊语言值实际上是一个模糊子集，它通过隶属函数来描述．将确定的隶属函数曲线离散化，就得到了有限个点上的隶属度．对子各语言值的隶属函数一般取三角形或梯形或正态分布．这里重要的是确定隶属函数曲线的形状．隶属函数曲线形状较尖的模糊子集其分辨率较高，控制灵敏度也较高；相反，隶属函数曲线形状较缓，控制特性也较平缓，系统稳定性好．如图 12-11 所示的三个模糊子集 A、B、C 的隶属函数曲线的形状不同，A 形状尖些，它的分辨率高，其次是 B，最低的是 C.

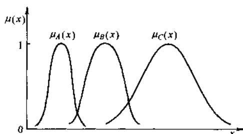


图 12-11　形状不同的隶属函数曲线

在实际应用中，偏差较大的情况下采用低分辨率的，偏差较小的情况下采用高分辨率的．另外，在确定某语言变量各语言值的隶属函数时，应注意它们对论域的覆盖程度，值论域中任何一点对这些模糊集的隶属度的最大值不能太小，以防止在这样的点失控，为此，一般应使论域的每一点对大约 3 个语言值的隶属度不为零.

12.5.2.3　建立模糊控制规则

模糊控制规则是人的控制经验的总结，它由若干条模糊条件

语句构成，在单输入单输出的模糊控制器中，控制规则的一般形式为

$$\text{if} \quad E = \underset{\sim}{A}_i \quad \text{then} \quad C = \underset{\sim}{C}_k$$

$$i \in I = \{1,2,\cdots,m\} \qquad k \in K = \{1,2,\cdots,l\}$$

其中 $\underset{\sim}{A}_i$ 和 $\underset{\sim}{C}_k$ 分别是偏差 E 和控制量 C 的某个语言值. 例如：

$$\text{if} \quad E = PB \quad \text{then} \quad C = NB$$

就是这种模糊条件语句.

在双输入单输出的模糊控制器中，控制规则的一般形式为

$$\text{if} \quad E = \underset{\sim}{A}_i \quad \text{and} \quad EC = \underset{\sim}{B}_j \quad \text{then} \quad C = \underset{\sim}{C}_k$$

$$i \in I = \{1,2,\cdots,m\}, \quad j \in J = \{1,2,\cdots,n\},$$

$$k \in K = \{1,2,\cdots,l\}.$$

其中 $\underset{\sim}{A}_i$、$\underset{\sim}{B}_j$、$\underset{\sim}{C}_k$ 分别是偏差 E 和偏差变化率 EC 及控制量 C 的语言值. 例如

if $E = NS$ and $EC = PS$ then $C = NS$

if $E = PM$ and $EC = NB$ then $C = NM$

都是这样的模糊条件语句. 其个数即控制规则的数目可达到 $m \times n$ 个.

前面已提到，模糊控制器最常用的结构为二维模糊控制器，它们的输入变量一般取误差和误差变化，输出则为控制量的增量. 对此种结构的模糊控制器，常采用所谓的 Mamdani 控制规则. 其中误差、误差变化及控制量增量均取 7 个语言值，为 $\{NB, NM, NS, O, PS, PM, PB\}$. 这样，便可得到如下控制规则：

if E is PB and EC is NB, then C is O

if E is NB and EC is PM, then C is PS

类似地，可得到表 12-3 所示的模糊控制规则表.

表 12-3　常见的模糊控制规则表

Δu \ Δe / e	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NB		PB			PM	PS	
NM			PM		PS		ZO
NS				PS			NS
ZO	PM	PS		ZO	NS		NM
PS	PS	ZO		NS			
PM			NS		NM		NB
PB		NS	NM				

上述模糊控制规则表的思想是，当误差 E 为正大（PB）时，如果误差变化 EC 为正大（PB），即误差正在不断增大．为迅速使误差减小，应使控制量迅速减少（NB）；如果误差变化为负小（NS），即误差在慢慢减少，因此应使误差继续减少，所以控制量 C 应适量地减少（NM）．此时，如果误差正在快速减少，即误差变化为负大（NB），则为防止超调过大，控制量暂时不需变化，故 C 为零（O）．

当系统接近稳态，即误差为 PS, O 和 NS 时，除了要消除误差外，还要特别注意防止大的超调．例如在误差为 PS 时，如果误差变化为快速变小（NB），则说明当前的控制量太小，应稍增大一些，所以控制量增量取为正小（PS）．

因此，模糊控制规则的主要设计原则是：以系统的稳定性为主要出发点，当误差大或较大时，选择控制量以尽快消除误差为主；而当误差较小时，选择控制量要防止超调．

12.5.3　模糊推理合成算法

在控制过程中，我们要考虑如何用模糊控制规则进行推理合成的问题．即假若输入变量 $E = \underset{\sim}{A}^*$，$EC = \underset{\sim}{B}^*$，那么输出 $C = \underset{\sim}{C}^*$ 该如何确定呢？我们将由已知输入 $E = \underset{\sim}{A}^*$，$EC = \underset{\sim}{B}^*$ 来确

定输出 $\underset{\sim}{C}^{*}$ 的方法称为模糊推理合成算法.

模糊控制规则由一组条件语句构成，因而它可以用一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 来表示. 一般我们采用推理合成规则

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{e} \circ \underset{\sim}{R}$$

来求出 $\underset{\sim}{C}^{*}$.

12.5.3.1　对于单输入单输出的情形

在单输入单输出的情况下，$\underset{\sim}{R}$ 是由 E 的论域 X 到 C 的论域 Z 上的模糊关系. 即

$$\underset{\sim}{R} = \bigcup_{i=1}^{m} (\underset{\sim}{A}_i \times \underset{\sim}{C}_k)$$

这里 $k=\varphi(i)$，表示 I 到 K 上的对应关系.

$\underset{\sim}{R}$ 的隶属函数为

$$\underset{\sim}{R}(x,z) = \bigvee_{i=1}^{m} (\underset{\sim}{A}_i(x) \wedge \underset{\sim}{C}_k(z))$$

当输入 $E = \underset{\sim}{A}^{*}$ 时，则输出

$$\underset{\sim}{C}^{*} = \underset{\sim}{A}^{*} \circ \underset{\sim}{R}$$

且
$$\mu_{\underset{\sim}{C}^{*}}(z) = \bigvee_{x \in X} [\underset{\sim}{A}^{*}(x) \wedge \underset{\sim}{R}(x,z)]$$

12.5.3.2　对于双输入单输出的情形

在双输入单输出的情况下，$\underset{\sim}{R}$ 是 $X \times Y$ 到 Z 上的模糊关系，其中 X、Y、Z 分别为误差 E、误差的变化 EC 及控制量 C 的论域.

$$\underset{\sim}{R} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{A}_i \times \underset{\sim}{B}_j \times \underset{\sim}{C}_k)$$

这里 $k=\varphi(i, j)$，表示 $I \times J$ 到 K 上的对应关系.

$\underset{\sim}{R}$ 的隶属函数为

$$\underset{\sim}{R}(x,y,z) = \bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} (\underset{\sim}{A}_i(x) \wedge \underset{\sim}{B}_j(y) \wedge \underset{\sim}{C}_k(z))$$

当输入$E = \underset{\sim}{A}^*$，$EC = \underset{\sim}{B}^*$时，则输出

$$\underset{\sim}{C}^* = (\underset{\sim}{A}^* \times \underset{\sim}{B}^*) \circ \underset{\sim}{R}$$

且 $$\underset{\sim}{C}^*(z) = \bigvee_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} [\underset{\sim}{A}^*(x) \wedge \underset{\sim}{B}^*(y) \wedge \underset{\sim}{R}(x,y,z)]$$

对于单输入单输出的推理合成计算，前面例子中已提及．双输入单输出情况举例如下：

例 12-8 设控制是双输入单输出的，控制规则由下面条件语句构成

if $E = \underset{\sim}{A}_1$ and $EC = \underset{\sim}{B}_1$ then $C = \underset{\sim}{C}_1$

if $E = \underset{\sim}{A}_2$ and $EC = \underset{\sim}{B}_2$ then $C = \underset{\sim}{C}_2$

这里论域$X = \{x_1, x_2\}$，$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$，$Z = \{z_1, z_2\}$

$$\underset{\sim}{A}_1 = \frac{0.5}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$$\underset{\sim}{A}_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2}$$

$$\underset{\sim}{B}_1 = \frac{0.1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{0.6}{y_3}$$

$$\underset{\sim}{B}_2 = \frac{0.6}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{0.1}{y_3}$$

$$\underset{\sim}{C}_1 = \frac{0.4}{z_1} + \frac{1}{z_2}$$

$$\underset{\sim}{C}_2 = \frac{1}{z_1} + \frac{0.4}{z_2}$$

求 $\underset{\sim}{R}$，又若输入为

$$\underset{\sim}{A}^* = \frac{1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2}$$

$$\underset{\sim}{B}^* = \frac{0.1}{y_1} + \frac{0.5}{y_2} + \frac{1}{y_3}$$

求输出 $\underset{\sim}{C}^*$.

解:

$$\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{B}_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

改写为

$$\underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{B}_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.1 \\ 1 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

从而

$$\underset{\sim}{R}_1 = \underset{\sim}{A}_1 \times \underset{\sim}{B}_1 \times \underset{\sim}{C}_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.1 \\ 1 \\ 0.6 \end{pmatrix} \times (0.4,\ 1) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}_2 \times \underset{\sim}{B}_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

改写为

$$\underset{\sim}{A}_2 \times \underset{\sim}{B}_2 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

从而

$$\underset{\sim}{R}_2 = \underset{\sim}{A}_2 \times \underset{\sim}{B}_2 \times \underset{\sim}{C}_2 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix} \times (1, 0.4) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}_1 \cup \underset{\sim}{R}_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

又当 $E = \underset{\sim}{A}^* = \frac{1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2}$，$EC = \underset{\sim}{B}^* = \frac{0.1}{y_1} + \frac{0.5}{y_2} + \frac{1}{y_3}$时，

$$\underset{\sim}{C}^* = (\underset{\sim}{A}^* \times \underset{\sim}{B}^*) \times \underset{\sim}{R}$$

$$= (0.1, 0.5, 1.0, 0.1, 0.5, 0.5) \times \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= (0.5, 0.5)$$

由上例可知，用模糊推理合成算法求 $\underset{\sim}{C}^*$时，计算是很复杂的，特别是当 m，n 较大时. 这对于在线进行推理是极为不利的，不适于进行实时控制. 因此，一般的模糊控制器大都事先离

线计算出模糊查询表，也称模糊控制表，并将此表存于计算机中．在控制过程中，计算机把采样后经变换得到的 x 与 y 和表中的行、列比较，可立即得出执行量 z.

表 12-4 为一常用的双输入单输出系统的模糊控制表.

表 12-4 模糊控制表

C (z) y \ x		偏差变化率 EC												
		-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
偏差 E	-6	6	5	6	5	6	6	6	3	3	1	0	0	0
	-5	5	5	5	5	5	5	5	3	3	1	0	0	0
	-4	6	5	6	5	6	6	6	3	3	1	0	0	0
	-3	6	5	5	5	5	5	5	2	1	0	-1	-1	-1
	-2	3	3	3	4	3	3	3	1	0	0	-1	-1	-1
	-1	3	3	3	4	3	3	1	0	0	0	-2	-1	-1
	0	3	3	3	4	1	1	0	-1	-1	-1	-3	-3	-3
	1	1	1	1	1	0	0	-1	-3	-3	-2	-3	-3	-3
	2	1	1	1	1	0	-2	-3	-3	-3	-2	-3	-3	-3
	3	0	0	0	0	-2	-2	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5
	4	0	0	0	-1	-3	-3	-6	-6	-6	-5	-6	-5	-6
	5	0	0	0	-1	-3	-3	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5
	6	0	0	0	-1	-3	-3	-6	-6	-6	-5	-6	-5	-6

12.5.4 确定模糊控制器模糊化和解模糊化的方法

尽管模糊控制器中的控制规则是由模糊语言构成的，但经过测量装置（传感器）采样得到的输入量以及执行机构所能接受的输出控制量都应该是确定的．下面介绍常用的模糊化与解模糊化的方法.

12.5.4.1 输入量的模糊化方法

所谓输入模糊化，就是将输入量误差及误差变化的精确量转换为模糊语言值的过程．一般采用如下方法：

较为简单的做法是将精确量离散化，然后与表示输入量的语言值建立对应关系．比如，将在［-6，+6］之间变化的连续量分为七个档次，每一档对应一个模糊集，这样处理使模糊化过程简单．如表12-5所示，在［-6，6］之间的任意精确量可以对应一个模糊量．在-6附近称为负大，用NB表示，在-4附近称为负中，用NM表示．在-5附近，由于

$$\mu_{MN}(-5)=0.7,\quad \mu_{NB}(-5)=0.8,\quad \mu_{NB}>\mu_{NM}$$

所以-5用NB表示．

表12-5 在［-6，+6］之间变化的对应模糊集

项目	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1.0
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2
PS	0	0	0	0	0	0	0	0.9	1.0	0.7	0.2	0	0
O	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0
NS	0	0	0.2	0.7	1.0	0.9	0	0	0	0	0	0	0
NM	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	1.0	0.8	0.4	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

此外，还有其他的模模化方法：

（1）单值模糊化

将论域U上的一点x^*映射成U上的一个模糊单值$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}$在x^*点的隶属度值为1，在U中其他点上的隶属度值均为0，即

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}1 & x=x^* \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（2）高斯模糊化

将$x^*\in U$映射成U上的模糊集$\underset{\sim}{A}$，它具有如下高斯隶属度函数：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=e^{-\left(\frac{x-x^*}{\sigma}\right)^2}$$

其中参数 σ 是正数.

(3) 三角形模糊化

将 $x^* \in U$ 映射成 U 上的模糊集 $\underset{\sim}{A}$，它具有如下三角形隶属度函数

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - x^*|}{b} & |x - x^*| \leqslant b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中参数 b 是正数.

总的来说，在考虑输入模糊化时，应首先满足点 x^* 处相应的模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 应有一个更大的隶属度值. 其次模糊化后 $\underset{\sim}{A}$ 应有助于简化推理计算.

12.5.4.2 输出量的非模糊化方法

由模糊推理合成算法得到的控制量 $\underset{\sim}{C}$ 是一个模糊集，不能直接用于控制被控对象，需要先转化成一个执行机构可以执行的精确量. 此过程一般称为解模糊过程，或称为模糊判决. 下面是常用的三种方法：

(1) 最大隶属度方法

这种方法非常简单，直接选择模糊子集中隶属度最大的元素作为控制量. 例如，已知控制量 $\underset{\sim}{C} = \frac{0.5}{-3} + \frac{0.5}{-2} + \frac{1}{-1} + \frac{0.5}{0} + \frac{0.5}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3}$，显然，隶属度最大的元素为 -1，因此选取 -1 作为输出控制量. 如果有两个以上的元素均为最大（一般依次相邻)，则可取它们的平均值，如：

$$\underset{\sim}{C} = \frac{0.5}{-3} + \frac{0.5}{-2} + \frac{0.5}{-1} + \frac{0}{0} + \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3}$$

则 $$c^* = \frac{1}{3}(-3-2-1) = -2$$

最大隶属度法能够突出主要信息，而且计算简单，但很多次要的信息都丢失了，因此显得比较粗糙，只能应用于控制性能要

求一般的系统.

(2) 中位数法

论域 U 上把隶属函数曲线与横坐标围成的面积平分为两部分的元素 z^* 称为模糊集的中位数. 中位数法就是把模糊集中位数作为控制量的精确值.

当论域为有限离散点时，例如

$$\underset{\sim}{C} = (0,0,0,0.8,0,0.2,0.4,0.5,0.6,0.2,0.5,0.6,0,0,0.8),$$

则 $S = 0.8 + 0.2 + 0.4 + 0.5 + 0.6 + 0.2 + 0.5 + 0.6 + 0.8$

$= 4.6$

面积 S 的一半为 2.3，不难看出把 S 分为两部分的对应点 c 在 0 与 1 之间，利用插值法可得

$$\Delta c = \frac{(2.3 - 1.9)}{(2.5 - 1.9)} \approx 0.67$$

故 $c \approx 0 + 0.67 = 0.67$ 可作为控制执行量.

与最大隶属度法相比，中位数法概括了更多的信息，但计算比较复杂，因此应用上比下面的加权平均法要少.

(3) 加权平均法

加权平均法的一般计算公式为

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}$$

其中 k_i 为元素 w_i 的权系数，加权平均法的关键在于权系数的选取. 一般讲，权系数与系统的响应特性有关. 因此，可根据系统的特点或经验来选取适当的权系数. 为简单记，可取隶属度作为权系数，即令 $k_i = C(w_i)$. 如 (2) 所举的输出模糊集，若采用加权平均法 (令 $k_i = C(w_i)$)，则有

$$c = \frac{6.5}{4.6} \approx 1.41$$

上面介绍了三种判决方法，到底采用哪一种方法为好，不能一概而论，每一种方法都有自己的优缺点，在具体问题中，应依实际情况和效果而定.

12.5.5 论域、量化因子、比例因子的选择

在讨论模糊控制规则的选取时，需要考虑输入变量与输出变量的论域选取问题，并且论域的选取还涉及到比例因子和量化因子的选择. 这里再作一些介绍.

12.5.5.1 论域及基本论域

我们将输入变量及输出变量的实际取值范围称为这些变量的基本论域. 显然基本论域内的量为精确量.

设误差的基本论域为$[-x_e, x_e]$，误差变化的基本论域为$[-x_c, x_c]$，控制量的基本论域为$[-y_u, y_u]$.

值定误差变量所取的模糊子集的论域为

$$\{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}$$

误差变化变量所取的模糊子集的论域为

$$\{-m, -m+1, \cdots, 0, \cdots, m-1, m\}$$

控制量所取的模糊子集的论域为

$$\{-l, -l+1, \cdots, 0, \cdots, l-1, l\}$$

有关论域的选择问题，由于语言变量的词集多半选为7个（或8个），为了满足模糊集论域中所含元素个数为模糊语言词集总数的二倍以上，使模糊集较好地覆盖论域，一般选误差论域的$n \geqslant 6$，选误差变化论域的$m \geqslant 6$，选控制量论域的$l \geqslant 7$.

从理论上讲，增加论域中元素个效，即细分等级，可提高控制精度. 但过细的量化等级将使算法复杂化，而且也没有必要.

12.5.5.2 量化因子及比例因子

为了进行模糊化处理，必须将输入变量从基本论域转换到相

应的模糊集的论域. 一般说来如果 X 是数轴上的一个区间 $[a, b]$，通过变换

$$x' = \frac{2n}{b-a}\left[x - \frac{a+b}{2}\right]$$

可将区间$[a, b]$转化为区间$[-n,n]$.

若计算出的x'不是整数，可将其归入最接近于x'的整数，从而将$[a, b]$上的任一值映射到有限集合$\{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}$中一点上. 应指出，实际上的输入变量（$E$, EC等）的精确值都是连续变化的量. 将连续量离散为$[-n, n]$之间有限个整数值的做法是为了使推理合成更简便.

对于误差的基本论域$[-x_e, x_e]$及误差变化的基本论域$[-x_c, x_c]$，记

$$K_e = \frac{n}{x_e}$$

$$K_c = \frac{m}{x_c}$$

称 K_e 为误差的量化因子，K_c 为误差变化的量化因子.

因为变换是由基本论域中任意一点映射到模糊集论域中的相近的整数点. 如将$[-x_e, x_e]$中一点 x_{e_i}映射为$[-n, n]$中一相近整数点 n_{e_j}，一般情况下，$K_e \neq n_{e_j}/x_{e_i}$.

此外，每次采样经过模糊控制算法给出的精确控制量，还不能直接控制对象，还必须将其转换到控制对象所能接受的基本论域中去.

记
$$K_u = \frac{y_u}{l}$$

称 K_u 为输出控制量的比例因子.

对于模糊控制器的设计，合理地选择模糊控制器输入变量的量化因子和输出控制量的比例因子也是非常重要的. 实验表明，

其选择对模糊控制器的控制性能影响极大.

对于比较复杂的被控过程，有时采用一组固定的量化因子和比例因子难以收到预期的控制效果，可以在控制过程中采用改变量化因子和比例因子的方法来调整整个控制过程中不同阶段上的控制特性，以使复杂过程控制收到良好的控制效果. 这种形式的控制器称为自调整比例因子模糊控制器.

12.6 自组织模糊控制器简介

前面介绍的查询表示模糊控制器是一种最基本、最简单的模糊控制形式，具有结构简单、实时性强，控制性能好等特点. 但是其控制规则一旦确定，在控制过程中便不再改变. 其控制规则是人们对某生产过程进行控制的经验总结. 有时人们对其过程认识贫乏，或总结不出完整的经验，这样得到的控制规则不够完善，必定会影响到控制的效果. 此外，由于过程不断变化，用固定的控制规则进行控制，结果可能与实际要求不符. 这就促使人们去研究新的模糊控制器，能够进行自我修改、完善和调整，以使系统的性能不断改善，达到预定的控制效果. 这就是所谓的自组织模糊控制器. 也叫自适应模糊控制器.

自组织模糊控制器应有以下两个功能：

（1）控制功能，即根据过程的状态给出合适的控制量；

（2）学习功能，即根据控制器的控制效果，自适应地调整控制器的结构或参数，以获得对被控对象更好的控制效果.

这就是说自组织模糊控制器应同时具备对系统的控制和辨识两大功能. 那么如何使模糊控制器具有自适应的功能呢？一般我们可以采用改变系统的结构参数（如量化因子及比例因子）或修改模糊控制规则等方法. 由于篇幅所限，在这里我们只通过介绍修正控制规则来改变系统输出性能的方法来说明构造自适应控制器的一般思想，其余不做介绍.

改变控制规则的途径有如下三条：

（1）增加语言变量；

（2）改变模糊集的隶属度；

（3）修改模糊控制状态表.

第一种方法相当于改变控制器的结构，一般不采用这种方法；第二种方法要修改模糊集的隶属函数，这种方法比较困难，因为我们难以了解控制性能与从属函数之间的关系；通常采用修改模糊控制状态表来改善性能，仅当用这种方法不能使性能继续改善时才采用前面的办法．下面谈一下修改模糊控制表的做法：

（1）给出偏差、偏差变化率及控制量的语言值 为简单起见，偏差 e、偏差变化率 $\dot{e}$ 和控制量 c 这三个语言变量均取 7 个语言值：正大、正中、正小、零、负小、负中和负大，且定义

正大$\triangleq 3$，正中$\triangleq 2$，正小$\triangleq 1$，零$\triangleq 0$，负小$\triangleq -1$，负中$\triangleq -2$，负大$\triangleq -3$.

（2）给出初始控制表 可根据实际问题，先给出一个粗糙的控制表．如表 12-6 就是一个简单的控制表.

表 12-6 初始控制表（c 值）

e	$\dot{e}$						
	−3	−2	−1	0	1	2	3
−3	−3	−3	−2	−2	−1	−1	0
−2	−3	−2	−2	−1	−1	0	1
−1	−2	−2	−1	−1	0	1	1
0	−2	−1	−1	0	1	1	2
1	−1	−1	0	1	1	2	2
2	−1	0	1	1	2	2	3
3	0	1	1	2	2	3	3

表 12-6 中的控制量可用一个解析表达式

$$c = \left\langle \frac{e + \dot{e}}{2} \right\rangle$$

表示，其中 $\langle a \rangle$ 表示一个与 a 同号而其绝对值大于或等于 $|a|$

的最小整数. 比如，$\langle 1.5\rangle=2$，$\langle 1\rangle=1$，$\langle 0.5\rangle=1$，$\langle 0\rangle=0$，$\langle -0.5\rangle=-1$，$\langle -1\rangle=-1$，$\langle -1.5\rangle=-2$；

(3) 给出带修正因子的控制规则 如令

$$c=\langle \alpha e+(1-\alpha)\dot{e}\rangle$$

其中 α 在0与1之间取值. 当 $\alpha=0.5$ 时，由上式就可给出初始控制表；当 $\alpha=0.2$ 时，上式给出如表12-7所示的经过修正的控制表.

表 12-7 修正的控制表（c 值）

e	$\dot{e}$						
	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	-3	-2	-1	-1	0	1	2
-2	-3	-2	-1	0	0	1	2
-1	-3	-2	-1	0	1	1	2
0	-2	-2	-1	0	1	2	2
1	-2	-1	-1	0	1	2	3
2	-2	-1	0	0	1	2	3
3	-2	-1	0	1	1	2	3

通过调整参数 α，就可对控制表（规则）进行修正. 而由上述易见，表中的每行每列都是单调增加的. 用 α 作为参数不仅方便，而且其值的大小，还直接意味着对偏差和偏差变化率的加权程度. 当控制系统误差 e 相对于误差变化 $\dot{e}$ 大时，就要给误差 e 较大的加权，给 $\dot{e}$ 较小的加权；反之，当误差变化 $\dot{e}$ 相对于误差 e 大时，则对误差变化 $\dot{e}$ 较大的加权，给误差 e 较小的加权. 这恰好反映了人们进行控制活动时的思维特点. 这样既可以克服单凭经验或通过对系统的辨识获得控制规则的困难，又可避免以往控制规则中的空档现象，因此这种带参数的控制规则的修

正具有重要意义.

12.7 模糊控制应用实例

12.7.1 模糊控制在机床控制中的应用（参见文献［24］）

在磨床研磨工件表面的过程中，工件表面的光洁度和进刀量都带有模糊性，现对磨床加工工件的过程进行模糊控制.

磨床加工工件过程的输入是进刀速度，输出是加工后工件的表面. 控制系统的设定值（光洁度）视为 u_0，并定义系统的输出

$$u_y = af^b v_w^d v_s^{-g} k$$

其中 f 为进刀速度，v_w 为工作速度，v_s 为转速，k 为铸件调节系数，a、b、d、g 均为给定的正常数.

再取相对偏差 $\Delta u = (u_y - u_0)/u_0$，偏差变化 $e_n = \Delta u_n - \Delta u_{n-1}$，此处 n 表示第 n 个采样间隔.

为简单起见，将偏差、偏差变化及控制量论域都取为

$$U = V = W = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

即将偏差、偏差变化及控制量均分为 11 个等级，如表 12-8 所示.

表 12-8 偏差、偏差变化及控制量

等 级	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
偏差/%	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25
偏差变化/%	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
进刀速度变化	$-5\Delta f$	$-4\Delta f$	$-3\Delta f$	$-2\Delta f$	$-1\Delta f$	0	Δf	$2\Delta f$	$3\Delta f$	$4\Delta f$	$5\Delta f$

表中 Δf 为进刀速度的上限与下限之差与 10 的商.

语言变量的取值为：极大（*HB*），很大（*VB*），大（*B*），较大（*NB*），稍大（*LB*），极小（*HS*），很小（*VS*），小（*S*），

较小（*NS*），稍小（*LS*），零（*O*）．它们的隶属函数如表 12-9 所示．

表 12-9 语言值的隶属度

变量	论域										
	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
HB	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.6	1
VB	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.6	1	0.6
B	0	0	0	0	0	0	0.2	0.6	1	0.6	0.2
NB	0	0	0	0	0	0.2	0.6	1	0.6	0.2	0
LB	0	0	0	0	0.2	0.6	1	0.6	0.2	0	0
O	0	0	0	0.2	0.6	1	0.6	0.2	0	0	0
LS	0	0	0.2	0.6	1	0.6	0.2	0	0	0	0
NS	0	0.2	0.6	1	0.6	0.2	0	0	0	0	0
S	0.2	0.6	1	0.6	0.2	0	0	0	0	0	0
VS	0.6	1	0.6	0.2	0	0	0	0	0	0	0
HS	1	0.6	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0

控制规则共有 31 条（略），根据这些规则可编出控制表（见表 12-10）．并存入计算机，这样便可对磨床加工过程进行控制，获得满意的效果．

表 12-10 控制表（c 值）

Δu	e_n										
	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
−5	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1	0
−4	5					−2					−1
−3	4					−2					−1
−2	4					1					−2

Δu	e_n										
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-1	3					1					-2
0	3	2	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
1	2					-1					-3
2	2					-1					-4
3	1					-2					-4
4	1					-2					-5
5	0	-1	-1	-2	-2	-3	-3	-4	-4	-5	-5

为简单起见，在表中我们定义：$-5\triangleq HS$，$-4\triangleq VS$，$-3\triangleq S$，$-2\triangleq NS$，$-1\triangleq LS$，$0\triangleq O$，$1\triangleq LB$，$2\triangleq NB$，$3\triangleq B$，$4\triangleq VB$，$5\triangleq HB$.

12.7.2 模糊控制在退火炉燃烧过程控制中的应用

12.7.2.1 概述

对燃油退火炉燃烧过程的控制，首先要求克服对象特性的多变性、非线性，噪声、不对称的增益特性、较大的纯滞后等因素的影响，实现比较精确的温度和压力控制．并在此基础上寻求最佳的燃烧过程，提高热效率，以达到节约能源的目的．

对退火炉燃烧过程的控制，要求维持稳定的温度以满足生产工艺的要求，保证钢材退火质量．最佳燃烧过程取决于燃料和空气的比例．根据统计分析，燃烧过程中空气过剩率 $\mu=1.02\sim1.10$ 时热效率最高，此区域称为最佳燃烧区．μ 值低于此区域会导致不完全燃烧而冒黑烟．反之，μ 值太高时空气过剩，废气将带走过多的热量，同时产生大量的 NO_x、SO_x 污染环境．因此在燃烧过程中，控制系统应该通过控制燃油和空气的比例来保持最

佳的燃烧状态.

此外，炉膛内的压力是随着工作情况而变化的，气温和废气组成等都对炉膛内的压力有较大影响，而炉压又能影响炉温，因此，要维持稳定的炉温，还需对炉膛内的压力进行调节. 保持适当的炉膛压力，可以提高热效率，延长窑炉的寿命. 因为炉压太高，会引起烟气外冒，炉压太低则会漏风，造成热损失.

综上所述，要保证退火质量，实现最佳燃烧过程，控制系统应包括以下三个基本组成部分：

（1）温度-燃油/空气流量调节回路；

（2）燃油/空气最佳比例调节回路；

（3）炉膛压力调节回路.

12.7.2.2 模糊控制系统的组成

退火炉燃烧过程控制的困难在于对象特性的多变性. 退火炉每炉钢材的品种规格、装炉重量及空间位置都不相同，炉子的升温和降温过程具有不对称的增益特性，燃油的热值也常常变化，所以燃油退火炉控制系统是一个非线性、时变、有噪声干扰、有纯滞后的系统. 这类系统建模的困难使现代控制理论中的最优控制难以应用，而模糊控制正适合应用于这类数学模型未知或多变的过程.

对于油/风比的控制，常用的做法是根据烟道废气中的残氧量来进行油/风比的校正. 实践证明，这种方法由于受多种条件限制效果不够理想. 因此，利用热效率与油/风比之间的峰值特性. 采用自寻优控制，自动控索最佳油/风比. 根据人的操作经验建立的模糊自寻优方法可以加快搜索过程，提高搜索质量，对不可控因素的干扰具有较好的自适应能力.

采用自寻优模糊控制器的退火炉燃烧过程控制系统如图12-12所示. 图中FPC为炉压模糊控制器；FTC为温度模糊控制器，它根据温度信号对油量和风量进行调节；FAC为油/风比模糊自寻优控制器，它不断发出试探信号，通过对燃油量的测

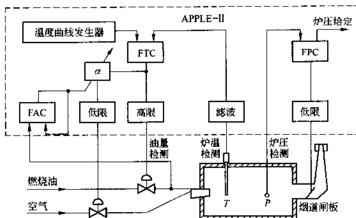


图 12-12 退火炉模糊控制系统图

量，搜索最佳油/风比. 燃料/空气控制采用并行结构.

系统中采用一台 APPLE-Ⅱ微机，包括主机、显示器、磁盘驱动器、打印机、A/D 和 D/A 转换器.

12.7.2.3 模糊控制器和模糊自寻优控制器

A 模糊控制器

炉温和炉压控制回路中的模糊控制器的原理图如图 12-13 所示. 图中 e 和 $\dot{e}$ 为误差及其导数，模糊控制采用常用的控制表形式，加以适当的人工修正，如表 12-11 所示.

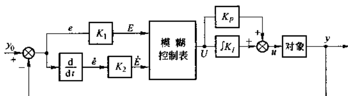


图 12-13 模糊控制器原理

表 12-11　人工修正后的模糊控制表

E \ $\dot{E}$ (U)	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-6	7	7	7	7	7	7	7	4	4	2	0	0	0
-5	7	7	7	7	7	7	6	4	4	2	0	0	0
-4	7	7	7	7	7	6	4	4	3	1	0	0	0
-3	7	7	7	7	6	4	4	3	1	0	-1	-2	-2
-2	6	6	6	6	4	4	3	1	0	-1	-1	-2	-2
-1	4	4	4	4	3	3	1	0	-1	-2	-2	-3	-3
-0	4	4	3	3	3	2	0	-1	-2	-3	-3	-3	-3
+0	3	3	3	3	2	1	0	-2	-3	-3	-3	-4	-4
1	3	3	2	2	1	0	-1	-3	-3	-4	-4	-4	-6
2	2	2	1	1	0	-1	-2	-4	-4	-6	-6	-6	-7
3	2	2	1	0	-1	-3	-4	-4	-6	-7	-7	-7	-7
4	0	0	0	-1	-3	-4	-4	-6	-7	-7	-7	-7	-7
5	0	0	0	-2	-4	-4	-6	-7	-7	-7	-7	-7	-7
6	0	0	0	-2	-4	-4	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7

控制表的输出要经过一个输出环节转换为实际控制量，再加到被控对象上进行控制. 常用的输出环节有比例输出和积分输出两种形式，前者阶跃响应快，但为有差控制；后者可接近无差控制，但响应较慢，且超调较大. 本系统采用二者相结合的比例积分输出结构，具有超调小，暂态时间短的优点.

上述模糊控制器有四个可调参数，即量化因子 K_1、K_2，比例系数 K_P 和积分系数 K_I. 增大 K_1、K_2 可以提高系统对误差及其变化的分辨率，使控制精度提高，但 K_1、K_2 太大不利于系统的稳定性. 增大 K_P 或 K_I 都能使响应速度加快，但可能引起振荡. 根据实际调整的经验，可取 $K_1 \approx K_2$，$K_P = (2 \sim 3) K_I$. 当 K_I

和 K_2 取值较大时，应适当减少 K_P 和 K_I. 若采样周期较长，则 K_P 和 K_I 可选得大一些.

在本系统中，FPC 的采样周期为 1/3min，FTC 的采样周期为 1min.

B 油/风比模糊自寻优控制器

退火炉的耗油量与油/风比之间存在极值关系. 这种极值关系受燃料热值变化及油嘴变化的影响，会产生漂移. 可以用最小耗油量为指标，对油/风比进行自寻优控制.

通常的步进或自寻优搜索的步长是固定的. 若步长太小，收敛速度过慢，则对于一些不可控扰动的响应就难以适应；若步长太大，则搜索损失增大，有时还会引起振荡，影响正常工作. 为了提高搜索速度，减少搜索损失，可以采用变步长的办法. 在离极值点较远处，曲线较陡处，选用大步长；而在极值点附近，曲线平缓处采用小步长进行搜索. 通过模糊逻辑判断可以实现步长的自动改变.

应用模糊集合理论设计的模糊自寻优控制器如图 12-14 所示，它以耗油量为指标，寻找最佳的油/风比. 在每个采样周期测量油耗增量 Δy，根据 Δy 和上一周期寻优步长决定本次寻优步长. ΔY 和 ΔX 分别是耗油增量和步长的模糊语言变量. K_y 为 Δy 的量化因子，K_x 为比例因子，它把 ΔX 转换为步长的实际值.

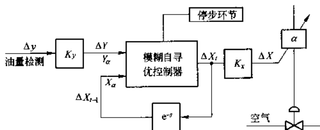


图 12-14 模糊自寻优控制器

选择 ΔY、ΔX 分别为包含 8 个和 6 个语言变量的模糊子集如下

$$\Delta Y=\{NB,NM,NS,NO,PO,PS,PM,PB\}$$

$$\Delta X=\{NB,NM,NS,PS,PM,PB\}$$

其中 NB, NM, NS, NO, PO, PS, PM, PB 分别表示负大，负中，负小，负零，正零，正小，正中和正大.

ΔY 和 ΔX 的论域分别规定为 14 和 12 个等级，即

$$Y_{\alpha}=\{-6,-5,\cdots,-0,+0,\cdots,+5,+6\}$$

$$X_{\alpha}=\{-6,-5,\cdots,-1,+1,\cdots,+5,+6\}$$

自寻优搜索过程的控制规则如表 12-12 所示，其中 ΔX_{t-1} 为上一周期寻优步长，ΔX_t 为本次寻优步长.

表 12-12　模糊自寻优控制规则表

ΔX_t \ ΔX_{t-1} / ΔY	NB	NM	NS	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NB	PB	PB	PB
NM	NM	NB	NB	PB	PB	PM
NS	NS	NM	NM	PM	PM	PS
NO	NS	NS	NS	PS	PS	PS
PO	PS	PS	PS	NS	NS	NS
PS	PS	PM	PM	NM	NM	NS
PM	PM	PB	PB	NB	NB	NM
PB	PB	PB	PB	NB	NB	NB

给定 ΔY 和 ΔX 的隶属度赋值表，应用模糊推理合成规则，计算出自寻优控制表，再加以人工修正，可得自寻优控

制表 12-13.

表 12-13　模糊自寻优控制表

X_{ai-1} / X_{ai} / Y_{α}	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6
-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	6	6	6	6	6	6
-5	-6	-6	-6	-6	-6	-6	6	6	6	6	6	6
-4	-4	-4	-5	-5	-6	-6	6	6	5	5	4	4
-3	-4	-4	-5	-5	-6	-6	6	6	5	5	4	4
-2	-1	-1	-3	-3	-4	-4	4	4	3	3	1	1
-1	-1	-1	-3	-3	-4	-4	4	4	3	3	1	1
-0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
+0	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	3	3	4	4	-4	-4	-3	-3	-1	-1
2	1	1	3	3	4	4	-4	-4	-3	-3	-1	-1
3	4	4	5	5	6	6	-6	-6	-5	-5	-4	-4
4	4	4	5	5	6	6	-6	-6	-5	-5	-4	-4
5	6	6	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
6	6	6	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-6	-6

自寻优的过程就是查表运算过程．增加 K_y 和 K_x，可以提高搜索速度，K_x 的值还影响搜索损失，故可根据对收敛速度的要求选择 K_y，而根据对搜索损失的要求选择 K_x.

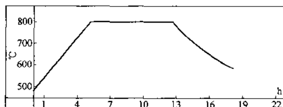
在实际应用中，为了保证油/风自寻优过程的稳定性，加入了一个停步环节．若由于干扰使炉温出现较大波动时，暂停搜索，以避免出现误动作.

自寻优控制是一种稳态最优比控制，其采样频率应低于对象固有频率的 2～5 倍．因此油/风比自寻优的采样周期应为温度调节采样周期的 2～5 倍．本系统选取自寻优采样周期为 3min，即为温度调节回路采样周期的 3 倍.

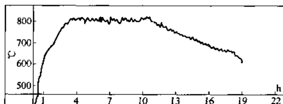
12.7.2.4　应用效果与结论

本系统已用于北京特殊钢厂一台燃油退火炉，取得了较满意的控制效果（参见文献［25］）.

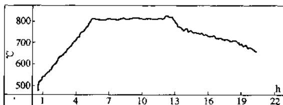
该炉的退火工艺曲线如图 12-15(a)所示，分升温、保温和降温三个过程. 降温为自由降温，不需要控制. 原来采用手动控制的温度记录曲线如图 12-15(b)所示，由图不难看出，手动控制难以达到工艺要求和保证可靠的质量. 采用模糊控制系统后，升温跟踪误差在 ± 4℃ 以内，保温段精度可达 + 2℃. 图 12-15(c)为采用模糊控制后的温度记录曲线. 炉压给定为



(a) 温度工艺曲线



(b) 手动控制温度记录曲线



(c) 模糊控制温度记录曲线

图 12-15　退火炉的温度曲线

$1mmH_2O$，控制精度为 $\pm 0.2mmH_2O$.

油/风比自寻优控制收敛速度很快，一般经过 6～8 个采样周期即可达到最佳值. 但由于炉子的原有风机选得过大，油/风比达到下限后，空气仍然过剩. 即使如此，据初步统计，在保温阶段，采用模糊控制比手动控制可节能 10% 左右，经济效益可观.

整个系统运行稳定，没有振荡，在温度控制回路加入 -20% 的阶跃干扰时，温度最大落差为 -10℃，恢复时间约为 10 个采样周期.

综上所述，模糊控制系统在退火炉上的应用达到了减轻操作人员劳动强度，提高控制精度，保证退火质量，节约能源的目的.

习 题 12

1. 设论域 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，U 上的模糊集"大"，"小"，"非常小"，"非常大"，"不非常大"分别为

小 =(1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2)，大 =(0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)

非常小 = (1, 0.64, 0.36, 0.16, 0.04)

非常大 = (0.04, 0.16, 0.36, 0.64, 1)

不非常大 = (0.96, 0.84, 0.64, 0.36, 0)

若已知模糊条件判断句为"若 A 小，则 B 大，否则 B 不非常大"，现给"A^* 非常小"，问 B^* 如何?

2. 已知如输入

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{a_1} + \frac{0.8}{a_2} + \frac{0.5}{a_3} + \frac{0.2}{a_4} + \frac{0}{a_5}$$

则输出为

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.8}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{0.4}{b_3} + \frac{0}{b_4}$$

问若输入为

$$\underset{\sim}{A}_1 = \frac{0.4}{a_1} + \frac{0.8}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{0.5}{a_4} + \frac{0}{a_5}$$

求输出 $\underset{\sim}{B}_1$.

3. 已知若输入为

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{a_1} + 0.5a_2 \text{ 且 } \underset{\sim}{B} = \frac{0.1}{b_1} + \frac{0.5}{b_2} + \frac{1}{b_3}$$

则输出为 $\underset{\sim}{C} = 0.2/c_1 + 1/c_2$，求根据这条规则确定的 R.

4. 设炉温偏差 $e \in U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$，热蒸汽量 $q \in W = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$，控制规则见下表：

观察量	PB_e	PS_e	O_e	NS_e	NB_e
控制量	NB_q	NS_q	O_q	PS_q	PB_q

$$\begin{aligned}
\text{又设 } PB &= (0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 1) \\
PS &= (0, 0, 0, 0, 1, 0.5, 0) \\
O &= (0, 0, 0.5, 1, 0.5, 0, 0) \\
NS &= (0, 0.5, 1, 0, 0, 0, 0) \\
NB &= (1, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

计算出它们的控制表，并求观察量 $e = (0.2, 1, 0.2, 0, 0, 0, 0)$ 的模糊响应与确切响应（采用最大隶属度法进行模糊判决）.

5. 设计一个炉温控制器：

炉温误差 $x \in X = \{-3; -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

误差变化率 $\dot{x} \in Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

控制量 $u \in Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

控制规则如下：

$\dot{x}$ / x \ u	负大	负小	0	正小	正大
正大	0	负小	负小	负小	负大
正小	正小	0	负小	负小	负大
0	正小	0	0	0	负小

续表

$\dot{x}$ / x \ u	负大	负小	0	正小	正大
负小	正大	正小	正小	0	负小
负大	正大	正大	正大	正小	0

其中，$u=f(x, \dot{x})$. 如"若x正大且$\dot{x}$负小，则u负小". 写出表示控制规则的模糊关系.

第 13 章　模 糊 概 率

尽管模糊性和随机性有着本质的区别，但两者之间又有一定的联系，是可以相互渗透的．同一现象往往既含有模糊性，也含有随机性，因此在研究这类问题时，把两类不确定性结合起来考虑是十分重要的．这正是模糊概率要解决的问题．本章先介绍模糊事件的普通概率，然后介绍普通事件的模糊概率，最后介绍模糊事件的模糊概率．

13.1　模糊事件的普通概率

在现实生活中，经常会遇到这样的事件，不仅其发生与否是不确定的，而且其含义也是不确定的．例如“某地区明年夏季出现暴雨天气的可能性很大”．这里“暴雨”是模糊事件，而“可能性很大”则用了概率语言．

下面给出模糊事件及其概率的定义．

13.1.1　模糊事件的概率

定义 13-1　设 Ω 是样本空间，且 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(\Omega)$，若 $\underset{\sim}{A}(w)$ 是一随机变量，则称 $\underset{\sim}{A}$ 为 Ω 中的模糊随机事件．模糊随机事件的概率定义为

$$P(\underset{\sim}{A}) \triangleq \int \underset{\sim}{A}(w)\mathrm{d}p = E\{\underset{\sim}{A}(w)\} \qquad (13.1)$$

其中 $\mathrm{d}p = p(w)\mathrm{d}w, p(w)$ 为概率密度．

若论域 Ω 是有限离散集时，则式 (13.1) 写成：

$$P(\underset{\sim}{A}) \triangleq \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}(w_i)p_i$$

模糊事件的普通概率有如下性质：

设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 均为 Ω 中的模糊事件，则有

(1) $0 \leqslant P(\underset{\sim}{A}) \leqslant 1$；$P(\varnothing) = 0$；$P(\Omega) = 1$；

(2) 若 $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$，则 $P(\underset{\sim}{A}) \leqslant P(\underset{\sim}{B})$；

(3) $P(\underset{\sim}{A}^c) = 1 - P(\underset{\sim}{A})$；

(4) $P(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = P(\underset{\sim}{A}) + P(\underset{\sim}{B}) - P(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})$；

(5) 若 $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \varnothing$，则 $P(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = P(\underset{\sim}{A}) + P(\underset{\sim}{B})$.

此性质可推广到有限个模糊事件上去.

若 $\underset{\sim}{A}_i$ 为 Ω 中的模糊事件（$i = 1, 2, \cdots, n$），且当 $i \neq j$ 时有 $\underset{\sim}{A}_i \cap \underset{\sim}{A}_j = \varnothing$（此时称 $\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_n$ 两两互不相容），则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\underset{\sim}{A}_i)$$

下面只证性质（4）.

证 (4)　当 $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \neq \varnothing$ 时，定义有

$$\begin{aligned}
& P(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) + P(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \\
&= \int \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}(w)\mathrm{d}p + \int_{\Omega} \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}(w)\mathrm{d}p \\
&= \int [\underset{\sim}{A}(w) \vee \underset{\sim}{B}(w)]\mathrm{d}p + \int [\underset{\sim}{A}(w) \wedge \underset{\sim}{B}(w)]\mathrm{d}p \\
&= \int [\underset{\sim}{A}(w) \vee \underset{\sim}{B}(w) + \underset{\sim}{A}(w) \wedge \underset{\sim}{B}(w)]\mathrm{d}p \\
&= \int [\underset{\sim}{A}(w) + \underset{\sim}{B}(w)]\mathrm{d}p \\
&= \int \underset{\sim}{A}(w)\mathrm{d}p + \int \underset{\sim}{B}(w)\mathrm{d}p \\
&= P(\underset{\sim}{A}) + P(\underset{\sim}{B})
\end{aligned}$$

定义 13-2　设 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 为 Ω 上的模糊事件，若

$$P(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = P(\underset{\sim}{A})P(\underset{\sim}{B})$$

成立，则称 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 是独立的.

定义 13-3　设 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 为模糊事件，若 $P(\underset{\sim}{B}) > 0$，则称

$$P(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B}) = \frac{P(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})}{P(\underset{\sim}{B})}$$

为在已知事件 $\underset{\sim}{B}$ 发生条件下的事件 $\underset{\sim}{A}$ 的条件概率.

若 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 独立，则

$$P(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B}) = P(\underset{\sim}{A}).$$

由此定义，易得如下三个定理.

定理 13-1　（乘法公式）

设 $\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，…，$\underset{\sim}{A}_n$ 为 Ω 上的 n 个模模事件，且 $P(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2 \cap \cdots \cap \underset{\sim}{A}_n) > 0$，则

$$P(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2 \cap \cdots \cap \underset{\sim}{A}_n)$$
$$= P(\underset{\sim}{A}_1)P(\underset{\sim}{A}_2 \mid \underset{\sim}{A}_1)\cdots P(\underset{\sim}{A}_n \mid \underset{\sim}{A}_1 \cap \cdots \cap \underset{\sim}{A}_{n-1})$$

定理 13-2　（全模率公式）

设 $\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_n$ 是 Ω 上的，n 个两两互不相容的模糊事件且 $P(\underset{\sim}{A}_i) > 0$，$(i = 1,2,\cdots,n)$，则对于任意 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，有

$$P(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{n} P(\underset{\sim}{A}_i)P(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A}_i)$$

定理 13-3　（贝叶斯公式）

设 $\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_n$ 是 Ω 上的，n 个两两互不相容的模糊事

件，$P(\underset{\sim}{A}_i > 0), (i = 1,2,\cdots,n)$，则对任意 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i$，且 $P(\underset{\sim}{A}) > 0$，有

$$P(\underset{\sim}{A}_i \mid \underset{\sim}{A}) = \frac{P(\underset{\sim}{A}_i)P(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A}_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(\underset{\sim}{A}_j)P(\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A}_j)}$$

例 13-1 掷一颗骰子，求模糊事件 $\underset{\sim}{A}$ = “出现的点数不太大也不太小”的概率，且设

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.6}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.6}{5}$$

解 取出现的点数为论域，即取

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，且出现 i 点的概率

$$P_i = \frac{1}{6}, \quad (i = 1,2,3,\cdots,6)$$

于是

$$P(\underset{\sim}{A}) = \frac{1}{6} \times 0.6 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 0.6$$
$$= 0.53$$

例 13-2 已知某产品的废品率为 0.01，现任意从中抽取 100 个进行检验，求模糊事件 $\underset{\sim}{A}$ = “所取产品中废品个数为四个左右”的概率，且设

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.6}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6}$$

解 取所遇废品的个数为论域，即取

$$\Omega = \{1,2,\cdots,100\}$$

再设 P_i 是取出产品中恰有 i 个废品的概率，即

$$P_i = C_{100}^{i} \cdot (0.01)^i \cdot (1 - 0.01)^{100-i}, (i = 1,2,\cdots,100)$$

则

$$P(\underset{\sim}{A}) = 0.6\times 0.18 + 1\times 0.06 + 1\times 0.02$$
$$+ 1\times 0.003 + 0.6\times 0.0005$$
$$= 0.2$$

故所取产品中废品个数为四个左右的概率为0.2.

例13-3 设某物体的长度为a，现用一仪器去测量，若无系统偏差，测量方差为σ^2（$\sigma>0$），则测量所得物体长度X是一随机变量，其概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

用$\underset{\sim}{A}$表示"测量的结果与a相差不大"，且定义

$$\underset{\sim}{A}(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{b}} \qquad (b>0,\text{为参数})$$

求$\underset{\sim}{A}$的概率.

解 按定义13-1有

$$P(\underset{\sim}{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2(2\sigma^2+b)}{2b\sigma^2}}dx$$
$$= \sqrt{\frac{b}{2\sigma^2+b}}$$

这里 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$

13.1.2 模糊事件的均值和方差

定义13-4 设$\underset{\sim}{A}$是样本空间Ω（$\Omega\subset R^n$）上的模糊事件，则定义

$$m(\underset{\sim}{A}) = \int x\underset{\sim}{A}(x)dp$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 的均值，定义

$$D(\underset{\sim}{A}) = \int [x - m(\underset{\sim}{A})]^2 \underset{\sim}{A}(x) \mathrm{d}p$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 的方差.

定义 13-5 设 $\underset{\sim}{A}$ 是样本空间 Ω（$\Omega \subset R^n$）上的模糊事件，则 $\underset{\sim}{A}$ 的 k 阶原点矩定义为

$$m_k(\underset{\sim}{A}) = \int x^k \underset{\sim}{A}(x) \mathrm{d}p$$

$\underset{\sim}{A}$ 的 k 阶中心矩定义为

$$D_k(\underset{\sim}{A}) = \int [x - m(\underset{\sim}{A})]^k \cdot \underset{\sim}{A}(x) \mathrm{d}p$$

显然：

(1) $m_1(\underset{\sim}{A})$ 是 $\underset{\sim}{A}$ 的均值；

(2) $D_2(\underset{\sim}{A})$ 是 $\underset{\sim}{A}$ 的方差.

例 13-4 掷一颗骰子，求模糊事件 $\underset{\sim}{A}$ = "面朝上的数字约为3"的概率、均值和方差，且设

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.4}{1} + \frac{0.6}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.4}{5} + \frac{0.2}{6}$$

解 取 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，且 $P_i = \frac{1}{6}$，（$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$）

$$P(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{6} \underset{\sim}{A}(x_i) p_i$$

$$= \frac{1}{6} \times 0.4 + \frac{1}{6} \times 0.6 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 0.6 + \frac{1}{6} \times 0.4 + \frac{1}{6} \times 0.2$$

$$= 0.53$$

$$m(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{6} x_i \underset{\sim}{A}(x_i) p_i$$

$$= 1 \times 0.4 \times \frac{1}{6} + 2 \times 0.6 \times \frac{1}{6} + 3 \times 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times 0.6 \times \frac{1}{6} + 5 \times 0.4 \times \frac{1}{6} + 6 \times 0.2 \times \frac{1}{6}$$

$$= 1.70$$

$$D(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{6} [x_i - m(\underset{\sim}{A})]^2 \underset{\sim}{A}(x_i) p_i$$

$$= \frac{1}{6}[(1-1.7)^2 \times 0.4 + (2-1.7)^2 \times 0.6 + (3-1.7)^2 \times 1 + (4-1.7)^2 \times 0.6 + (5-1.7)^2 \times 0.4 + (6-1.7)^2 \times 0.2]$$

$$= \frac{1}{6}[0.196 + 0.054 + 1.69 + 3.174 + 4.356 + 3.698]$$

$$= 2.19$$

13.2 普通事件的模糊概率

13.2.1 语言概率

在许多问题中，事件本身是确切的，而其概率却是模糊的. 比如甲、乙两队进行比赛，问甲队获胜的可能性有多大? 这时我们很难给出一个确切的数值答案，却习惯用“很大”、“不大”、“极小”等模糊词汇来回答，例如说“甲队获胜的可能性很大”比说“甲队获胜的可能性为0.9更符合实际”. 再如说“模本不可能”是指“事件出现的概率几乎为零”；“非常可能”意指“事件出现的模率很大”；“完全可能”意指“事件出现的概率几乎为1”.

对于“明确事件”的模糊概率，不像普通概率那样用[0, 1]中的数值表示，而是用模糊语言表示，所以我们称普通事件的模糊模率为模糊语言概率，简称语言概率.

由于模率 P 在[0, 1]上取值，所以语言概率是以[0, 1]为论域的模糊子集，用 $\mathscr{F}([0, 1])$ 表示由[0, 1]上全体模

糊子集构成的类，而它的某一个选定的子类 $\mathscr{E}$ 称为语言概率的值空间，$\mathscr{E}$ 中的元素称为概率语言值．如“很可能”对应着“出现的概率很大”，“很不可能”对应着“出现的概率很小”．

设 Ω 为论域，$\mathscr{A}$ 为 Ω 上所有模糊事件的集合，则语言概率为

$$P:\mathscr{A}\to\mathscr{E}$$

下面给出三种原始单词：

（1）“p”　p 是 [0，1] 中的一个实数．“p”的隶属函数规定为

$$p(q)=\begin{cases}1, & 当\ q=p\\ 0, & 当\ q\neq p\end{cases}\qquad (q\in[0,1])$$

（2）“很可能”　它的隶属函数定义为

$$“很可能”(p)=\begin{cases}0 & , \quad 0\leqslant p\leqslant a\\ 2\left(\dfrac{p-a}{1-a}\right)^2 & , \quad a\leqslant p\leqslant \dfrac{a+1}{2}\\ 1-2\left(\dfrac{p-1}{1-a}\right)^2 & , \quad \dfrac{a+1}{2}\leqslant p\leqslant 1\end{cases} \tag{13.2}$$

此处 a 是一个参数，且 $1>a>\dfrac{1}{2}$.

（3）“很不可能”一般取

“很不可能”(p) = “很可能”$(1-p)$

$$=\begin{cases}0 & , \quad 0\leqslant 1-p\leqslant a\\ 2\left(\dfrac{1-p-a}{1-a}\right)^2 & , \quad a\leqslant 1-p\leqslant \dfrac{a+1}{2}\\ 1-2\left(\dfrac{1-p-1}{1-a}\right)^2 & , \quad \dfrac{a+1}{2}\leqslant 1-p\leqslant 1\end{cases}$$

$$
= \begin{cases} 1-2\left(\frac{p}{1-a}\right)^2, & 0 \leqslant p \leqslant \frac{1-a}{2} \\ 2\left(\frac{1-p-a}{1-a}\right)^2, & \frac{1-a}{2} \leqslant p \leqslant 1-a \\ 0, & 1-a \leqslant p \leqslant 1 \end{cases}
$$

模糊概率的论域是 [0, 1]，在实际问题中为方便起见常常考虑离散的情况，将 [0, 1] 换为离散域 U，通常取

$U=\{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$

在论域 U 上，可以定义

"很可能" $=\frac{0.5}{0.6}+\frac{0.7}{0.7}+\frac{0.9}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}$

"很不可能" $=\frac{0.5}{1-0.6}+\frac{0.7}{1-0.7}+\frac{0.9}{1-0.8}+\frac{1}{1-0.9}+\frac{1}{1-1}$

$$=\frac{1}{0}+\frac{1}{0.1}+\frac{0.9}{0.2}+\frac{0.7}{0.3}+\frac{0.5}{0.4}$$

将逻辑运算施于这些原始单词时，便得到一系列概率语言便：

"不很可能" (p) = ("很可能")^c (p)

("很可能" 或 "很不可能") (p)

= ("很可能") (p) $\vee$ ("很不可能") (p)

"有点可能" (p) = ("很可能" (p))$^{\frac{1}{2}}$

$$
= \begin{cases} 0, & 0 \leqslant p \leqslant a \\ \sqrt{2}\left(\frac{p-a}{1-a}\right), & a < p \leqslant \frac{a+1}{2} \\ \sqrt{1-2\left(\frac{p-1}{1-a}\right)^2}, & \frac{a+1}{2} < p \leqslant 1 \end{cases}
$$

"非常可能"(p) = ("很可能"(p))^2

$$=\begin{cases} 0, & 0 \leqslant p \leqslant a \\ 4\left(\dfrac{p-a}{1-a}\right)^4, & a < p \leqslant \dfrac{a+1}{2} \\ \left[1-2\left(\dfrac{p-1}{1-a}\right)^2\right]^2, & \dfrac{a+1}{2} < p \leqslant 1 \end{cases}$$

经模糊化算子作用，也可得到一类概率语言值：

$$\text{“差不多是}p\text{”}(q) = \begin{cases} e^{-(q-p)^2} & |q-p| \leqslant \delta \\ 0 & |q-p| > \delta \end{cases} \qquad q \in [0,1]$$

“差不多是0” = “几乎不可能”（发生）

“差不多是1” = “几乎一定”（发生）

经判定化算子作用，还可得到：

$$\text{“倾向很可能”}(p) = d_{\frac{1}{2}}[\text{“很可能”}(p)]$$

$$=\begin{cases} 1, & p \geqslant \dfrac{1+a}{2} \\ 0, & p < \dfrac{1+a}{2} \end{cases}$$

$$\text{“倾向很不可能”}(p) = d_{\frac{1}{2}}[\text{“很不可能”}(p)]$$

$$=\begin{cases} 1, & p < \dfrac{1+a}{2} \\ 0, & p \geqslant \dfrac{1+a}{2} \end{cases}$$

这时模糊概率向普通概率转化，并且用一界限来衡量事件是否发生.

下面给出概率语言值的运算法则

定义 13-6 设 $\underset{\sim}{\pi}_i \in \mathscr{E}, a_i \in [0,1] (i = 1,2,\cdots,n)$，则$\{\underset{\sim}{\pi}_i\}$的线性组合被定义为一个模糊概率语言值，即

$$(a_1\underset{\sim}{\pi}_1 + a_2\underset{\sim}{\pi}_2 + \cdots + a_n\underset{\sim}{\pi}_n)(p)$$

$$\triangleq \bigvee_{\substack{a_1p_1+\cdots+a_np_n=p \\ p_1+p_2+\cdots+p_n=1}} (\underset{\sim}{\pi}_1(p_1) \wedge \cdots \wedge \underset{\sim}{\pi}_n(p_n))$$

易知：(1) 概率语言值对如上定义 m 运算是封闭的；(2) $P\in[0,1]$.

例 13-5 设 $U=\{0, 0.1, \cdots, 0.9, 1\}$，且

$$\underset{\sim}{\pi}_1 = \text{“0.2”} = \frac{0.7}{0.1}+\frac{1}{0.2}+\frac{0.6}{0.3}$$

$$\underset{\sim}{\pi}_2 = \text{“0.8”} = \frac{0.7}{0.7}+\frac{1}{0.8}+\frac{0.6}{0.9}$$

求模糊概率语言值 $\underset{\sim}{\pi} = a_1\underset{\sim}{\pi}_1 + a_2\underset{\sim}{\pi}_2$， $a_1, a_2 \in [0,1]$.

解 由定义 $\underset{\sim}{\pi}$ 的元素 p 要满足

$$a_1p_1 + a_2p_2 = p, \quad p_1 + p_2 = 1,$$

所以，$\underset{\sim}{\pi}$ 的元素为

$$0.1a_1 + 0.9a_2, \quad 0.2a_1 + 0.8a_2, \quad 0.3a_1 + 0.7a_2.$$

当 $a_1 \neq a_2$ 时，

$$\underset{\sim}{\pi} = \frac{0.7\wedge 0.6}{0.1a_1+0.9a_2}+\frac{1\wedge 1}{0.2a_1+0.8a_2}+\frac{0.6\wedge 0.7}{0.3a_1+0.7a_2}$$

$$= \frac{0.6}{0.1a_1+0.9a_2}+\frac{1}{0.2a_1+0.8a_2}+\frac{0.6}{0.3a_1+0.7a_2}$$

即
$$\underset{\sim}{\pi} = \begin{cases} \dfrac{0.6}{0.1a_1+0.9a_2}+\dfrac{1}{0.2a_1+0.8a_2}+\dfrac{0.6}{0.3a_1+0.7a_2} & a_1 \neq a_2, \quad a_1, a_2 \in [0,1], \\ \dfrac{1}{a} & a_1 = a_2 = a \in [0,1]. \end{cases}$$

例 13-6 设 $\pi_1 =$ “很可能” (p)，$\pi_2 =$ “很不可能” (p)，则对任意 $p\in[0,1]$，

$$\pi_1(p) = \pi_2(1-p)$$

于是，对任意 $a_1 \neq a_2$，有

$$(a_1\pi_1 + a_2\pi_2)(p) = \bigvee_{\substack{a_1p_1+a_2p_2=p \\ p_1+p_2=1}} (\pi_1(p_1) \wedge \pi_2(p_2))$$

$$= \bigvee_{a_1p_1+a_2(1-p_1)=p} (\pi_1(p_1) \wedge \pi_2(1-p_1))$$

$$= \bigvee_{a_1p_1+a_2(1-p_1)=p} (\pi_1(p_1) \wedge \pi_2(p_1))$$

$$= \bigvee_{p_1=\frac{p-a_2}{a_1-a_2}} (\pi_1(p_1))$$

$$= \begin{cases} \pi_1\left(\dfrac{p-a_2}{a_1-a_2}\right) , & a_1 \leqslant p \leqslant a_2 \\ & (\text{或 } a_2 \leqslant p \leqslant a_1) \\ 0 , & \text{其他} \end{cases}$$

在式（13-2）中不妨取 $a=0.6$，则

$$\pi_1(p) = \begin{cases} 0 , & 0 \leqslant p \leqslant 0.6 \\ 2\left(\dfrac{p-0.6}{0.4}\right)^2 , & 0.6 < p \leqslant 0.8 \\ 1-2\left(\dfrac{p-1}{0.4}\right)^2 , & 0.8 < p \leqslant 1 \end{cases}$$

设 $a_1=0.8$，$a_2=0.2$，则当 $0.2 \leqslant p \leqslant 0.8$ 时，有

$$(0.8\pi_1 + 0.2\pi_2)(p) = \pi_1\left(\frac{p-0.2}{0.8}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 , & 0 \leqslant \dfrac{p-0.2}{0.6} \leqslant 0.6 \\ 2\left[\left(\dfrac{p-0.2}{0.6}-1\right)/0.4\right]^2 , & 0.6 < \dfrac{p-0.2}{0.6} \leqslant 0.8 \\ 1-2\left[\left(\dfrac{p-0.2}{0.6}-1\right)/0.4\right]^2 , & 0.8 < \dfrac{p-0.2}{0.6} \leqslant 1 \end{cases}$$

$$
= \begin{cases} 0 \quad , & 0.2 \leqslant p \leqslant 0.56 \\ 2\left(\frac{p-0.56}{0.24}\right)^2 \quad , & 0.56 < p \leqslant 0.68 \\ 1-2\left(\frac{p-0.8}{0.24}\right)^2 \quad , & 0.68 < \frac{p-0.2}{0.6} \leqslant 0.8 \end{cases}
$$

当 $0 \leqslant p < 0.2$ 或 $0.8 < p \leqslant 1$ 时

$$
(0.8\pi_1 + 0.2\pi_2)(p) = 0
$$

下面给出语言概率的定义:

定义 13-7 设 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$, $\underline{\pi}_i \in \mathscr{E}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 定义普通事件 $A \in \mathscr{A}$ 的模糊概率为

$$
P(A) \triangleq \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{\pi}_i
$$

其中 $a_i \triangleq A(w_i)$, $\underline{\pi}_i \triangleq P(w_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$

容易验证语言概率有如下性质:

(1) 正规性 $P(\Omega) = 1$;

(2) 有限可加性 对 $\forall A$、$B \in \mathscr{A}$, $A \cap B = \varnothing$, 有

$$
P(A \cup B) = P(A) + P(B)
$$

其中 $P(A) + P(B)$ 意指:

若

$$
P(A) = a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + \cdots + a_n\pi_n
$$
$$
P(B) = b_1\pi_1 + b_2\pi_2 + \cdots + b_n\pi_n
$$

则

$$
P(A) + P(B) = (a_1 + b_1)\pi_1 + (a_2 + b_2)\pi_2 + \cdots + (a_n + b_n)\pi_n
$$

定义 13-8 称四元序组 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{E}, P)$ 为一个语言概率场, 其中 Ω 为样本空间, $\mathscr{A}$ 为 Ω 上全体模糊事件的集合, 而 $\mathscr{E}$ 为 $\mathscr{F}([0, 1])$ 的某一子类, P 为语言概率.

13.2.2 模糊概率随机变量

定义 13-9 设$\xi(w)$是定义在$(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{E}, P)$上的单值实函数，则称$\xi$为模糊概率随机变量$(w \in \Omega)$.

定义 13-10 模糊概率随机变量ξ的分布函数

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{\xi(w_i) < x} \underset{\sim}{\pi}_i = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda F_\lambda(x)$$

其中 $\underset{\sim}{\pi}_i \in \mathscr{E}$, $F_\lambda(x) = \sum_{\xi(w_i) < x} (\underset{\sim}{\pi}_i)_\lambda$.

分布函数$F(x)$具有如下性质：

(1) 单调性 若$a<b$，则$F(a) \leqslant F(b)$；

(2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

定义 13-11 设模糊概率随机变量ξ的可能取值为$a_1, a_2, \cdots, a_m, (m \leqslant n)$，则称

$$\underset{\sim}{\pi}_j' = P\{\xi = a_j\} = \sum_{\xi(w_i) = a_j} \underset{\sim}{\pi}_i = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underset{\sim}{\pi}_j')_\lambda$$

为ξ的模糊概率分布列，其中

$$(\underset{\sim}{\pi}_j')_\lambda \triangleq \sum_{\xi(w_i) = a_j} (\underset{\sim}{\pi}_i)_\lambda$$

定义 13-12 若$\xi_1(w), \xi_2(w)$定义在同一语言概率场$(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{E}, P)$上，则称

$$\xi = (\xi_1, \xi_2)$$

构成一个二维模糊概率随机向量，其联合分布函数定义为

$$F(x_1, x_2) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\}$$

$$= \sum_{\xi_1(w_i) < x_1, \xi_2(w_i) < x_2} \underset{\sim}{\pi}_i$$

二维模糊概率随机向量的分布函数$F(x, y)$具有如下性质：

(1) 对x或y都是单调不减的，即若$x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，则

$$F(x_1, y) \leqslant F(x_2, y)$$

$$F(x,y_1) \leqslant F(x,y_2)$$

（2）对任意的 x，$y \in$ 实数，有

$$\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$$

$$\lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1$$

定义 13-13 设二维模糊概率随机向量（X，Y）的一切可能取值为（a_i，b_j），（$i=1, 2, \cdots, n_1$；$j=1, 2, \cdots, n_2$），则称

$$\underset{\sim}{\pi}'_{ij} = P\{X = a_i, Y = b_j\} = \sum_{X(w_k)=a_i, Y(w_k)=b_j} \underset{\sim}{\pi}_k$$

为（X，Y）的联合模糊概率分布列；称

$$\underset{\sim}{\pi}_{i\cdot} = P(X = a_i) = \sum_{X(w_k)=a_i} \underset{\sim}{\pi}_k = \sum_{j=1}^{n_2} \underset{\sim}{\pi}'_{ij}$$

$$\pi_{\cdot j} = P(Y = b_j) = \sum_{Y(w_k)=b_j} \underset{\sim}{\pi}_k = \sum_{i=1}^{n_1} \underset{\sim}{\pi}'_{ij}$$

为（X，Y）的边际模糊概率分布列.

定义 13-14 （模糊概率随机变量 ξ 的数学期望）

设 ξ 的模糊概率分布列为

$$P(\xi = a_j) = \underset{\sim}{\pi}'_j \qquad (j = 1,2,\cdots,m)$$

则 ξ 的数学期望定义为

$$\underset{\sim}{E}(\xi) = \sum_{j=1}^{m} a_j \underset{\sim}{\pi}'_j$$

定义 13-15 （模糊概率随机变量 ξ 的方差）

设 ξ 的模糊概率分布列为

$$P(\xi = a_j) = \underset{\sim}{\pi}'_j \qquad (j = 1,2,\cdots,m)\cdot$$

则 ξ 的方差定义为

$$\underset{\sim}{D}(\xi) = \sum_{j=1}^{m}(a_j - \sum_{j=1}^{m} a_j \underset{\sim}{\pi}'_j)^2 \underset{\sim}{\pi}'_j$$

13.3 模糊事件的模糊概率

前两节讨论了模糊事件的普通概率与普通事件的模糊概率，但在实际问题中，有时事件与概率都是模糊的. 如“这是好办法，多数人会同意”，“明天是好天气的可能性大”，都属于这种类型的问题.

定义 13-16 设 $\underset{\sim}{A}$ 是语言概率场 (Ω, $\mathscr{A}$, $\mathscr{E}$, P) 上的模糊事件，称

$$P(\underset{\sim}{A}) \triangleq \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}(w_i)\pi_i$$

为模糊事件 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊概率. 其中 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$，$\underset{\sim}{\pi}_1$、$\underset{\sim}{\pi}_2$、…、$\underset{\sim}{\pi}_n \in \mathscr{E}$.

例 13-7 设 $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.4}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3}$$

又设 $\underset{\sim}{\pi}_1$ = “接近于 0.3” $=\frac{0.6}{0.2}+\frac{1}{0.3}+\frac{0.6}{0.4}$

$\underset{\sim}{\pi}_2$ = “接近于 0.6” $=\frac{0.6}{0.5}+\frac{1}{0.6}+\frac{0.6}{0.7}$

$\underset{\sim}{\pi}_3$ = “接近于 0.1” $=\frac{0.6}{0}+\frac{1}{0.1}+\frac{0.6}{0.2}$

则模糊事件 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊概率为

$$\begin{aligned}P(\underset{\sim}{A}) &= 0.4\underset{\sim}{\pi}_1 + 1\underset{\sim}{\pi}_2 + 0.8\underset{\sim}{\pi}_3 \\ &= 0.4 \times \left(\frac{0.6}{0.2}+\frac{1}{0.3}+\frac{0.6}{0.4}\right) + 1 \times \left(\frac{0.6}{0.5}+\frac{1}{0.6}+\frac{0.6}{0.7}\right) \\ &\quad + 0.8 \times \left(\frac{0.6}{0}+\frac{1}{0.1}+\frac{0.6}{0.2}\right)\end{aligned}$$

由上一节定义 13-6 中对概率语言值的约束条件，此式运算应满足

$$a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + a_3\pi_3 = p, \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

其中

$$a_1 = \underset{\sim}{A}(1), \quad a_2 = \underset{\sim}{A}(2), \quad a_3 = \underset{\sim}{A}(3),$$

于是

$$\begin{aligned} P(\underset{\sim}{A}) = & \frac{0.6 \wedge 1 \wedge 0.6}{0.4 \times 0.2 + 1 \times 0.6 + 0.8 \times 0.2} \\ & + \frac{0.6 \wedge 0.6 \wedge 1}{0.4 \times 0.2 + 1 \times 0.7 + 0.8 \times 0.1} \\ & + \frac{1 \wedge 0.6 \wedge 0.6}{0.4 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 0.8 \times 0.2} \\ & + \frac{1 \wedge 1 \wedge 1}{0.4 \times 0.3 + 1 \times 0.6 + 0.8 \times 0.1} \\ & + \frac{1 \wedge 0.6 \wedge 0.6}{0.4 \times 0.3 + 1 \times 0.7 + 0.8 \times 0} \\ & + \frac{0.6 \wedge 0.6 \wedge 1}{0.4 \times 0.4 + 1 \times 0.5 + 0.8 \times 0.1} \\ & + \frac{0.6 \wedge 1 \wedge 0.6}{0.4 \times 0.4 + 1 \times 0.6 + 0.8 \times 0} \\ = & \frac{0.6}{0.84} + \frac{0.6}{0.86} + \frac{0.6}{0.78} + \frac{1}{0.8} + \frac{0.6}{0.82} + \frac{0.6}{0.74} + \frac{0.6}{0.76} \\ = & \text{“接近于 0.8”}. \end{aligned}$$

习 题 13

1. 已知在某雷达探测空域内存在一架来袭敌机，雷达在该空域内搜索，直至发现目标为止. 若雷达每搜索一次的检测概率为 p，且各次搜索是相互独立的，问雷达“搜索不了几次”就发现目标的概率是多大（其中 $\underset{\sim}{A} = \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4}$）？

2. 某商店售出某产品的个数 x 服从均值为 μ 方差为 σ^2 的正态分布，"大体售出 b 个左右产品"这一模糊事件 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}(x)=e^{-\frac{(x-b)^2}{2k^2}}$$

求 $\underset{\sim}{A}$ 的概率 $P(\underset{\sim}{A})=?$

3. 对某地区进行普查，得慢性气管炎发病率如下：

年龄分组	患病率/%
15 岁以下	2.8
15～25 岁	3.7
25～35 岁	5.0
35～45 岁	7.6
45～55 岁	11.0
55 岁以上	14.2

设

$$\text{“青年”}=\frac{1}{15\sim25}+\frac{0.6}{25\sim35}$$

$$\text{“老年”}=\frac{1}{55\text{以上}}+\frac{0.3}{45\sim55}$$

试算出"青年"和"老年"患慢性气管炎的概率.

4. 设

$$\text{“很可能”}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant0.7\\ 2\left(\dfrac{x-0.7}{1-0.7}\right)^2, & 0.7<x\leqslant0.8\\ 1-2\left(\dfrac{x-0.7}{1-0.7}\right)^2, & 0.8<x\leqslant1\end{cases}$$

求：(0.6"很可能" +0.3"很不可能")(x) =?

5. 设 $\Omega=\{w_1,w_2,w_3\}$，$\underset{\sim}{A}=\dfrac{0.6}{w_1}+\dfrac{1}{w_2}+\dfrac{0.7}{w_3}$，

$$\pi_{w_1}=\text{“大约 0.2”}=\frac{0.7}{0.1}+\frac{1}{0.2}+\frac{0.6}{0.3},$$

$$\pi_{w_2}=\text{“大约 0.7”}=\frac{0.6}{0.6}+\frac{1}{0.7}+\frac{5}{0.8},$$

$$\pi_{w_3}=\text{“大约 0.1”}=\frac{0.5}{0}+\frac{1}{0.1}+\frac{0.4}{0.2},$$

求 $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{A})$.

附录　预备知识

附录1　普通集合简介

模糊集合是普通集合的推广和扩充，因此普通集合的理论是学习模糊集合的必备知识，考虑到读者对普通集合的知识已有一定基础，这里仅对基本内容做一简要回顾.

1.1　集合的概念

集合是一个不能精确定义的基本概念，一般地说，具有某种共同特点，彼此可以相互区别的个体构成的整体，就形成一个集合，而构成集合的个体称为集合的元或元素. 比如，“桌子上的物品”，“全体自然数”……都是集合，而该桌上的台灯、词典就是“桌子上的物品”这个集合中的元素；数“1”、“5”是“全体自然数”集合中的元素.

集合通常用大写字母 A，B，…来表示，而集合的元素则以小写字母 a，b，…表示，当 a 是集合 A 的元素时，记 $a \in A$，读作“a 属于 A”，否则记 $a \notin A$,读作“a 不属于 A”. 不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$.

集合可分为有限集和无限集. 有限集是指含有有限个元素的集合，无限集是指含无限个元素的集合.

我们在研究分析一个具体问题时，往往要先规定一个合适的范围，作为我们讨论该问题的出发点，称为基点. 比如，要讨论“矿石的特性”，我们不必去考察一头牛或一匹布，只需先把我们的议题限制在“全体矿石”这个范围内，然后把所有矿石作为讨论对象就行了. 这个合适的范围称为论域（或全域）. 论域一般用 U、V、…、X、Y、…表示.

给定论域 U，U 中的某一部分元素构成的集合叫做 U 上的一个集合.

普通集合概念遵从二值逻辑，即给定论域 U，以及 U 上的集合 A，那么对于 U 上的任何元素 u 与 A 的关系只有两种可能：$u \in A$或 $u \notin A$. 因此要想确定 U 上的一个集合 A，只需对 U 中的任一元素 u，都能在

$$u \in A \text{ 和 } u \notin A$$

两者之间作一选择就行了.

设A、B是 U 上的两个集合，对于任意 $u \in U$，若 $u \in A$，则 $u \in B$，便称 B 包含 A，记作 $B \supseteq A$，或称 A 被 B 包含，记作 $A \subseteq B$，此时 A 叫做 B 的子集.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$，则称A、B 相等，记作 $A = B$.

U 中的任一集合 A 都是 U 的子集，即 $A \subseteq U$. 易知，U 本身也是 U 的一个子集. 若把"$\subseteq$"看作一种大小关系，那么 U 有最大子集和最小子集. 最大子集即为其本身，最小子集即为空集 $\varnothing$. 对任意 $A \subseteq U$，都有

$$\varnothing \subseteq A \subseteq U$$

由于我们在讨论一问题时，总假定所涉及到的集合是同一论域 U 上的集合，因此有时也把集合称为子集.

值得注意的是元素与集合是不同层次的两个概念，特别对于元素 u 与仅由元素 u 组成的单元素集更应该注意不要混淆. 元素与集合之间是"属于"或"不属于"的关系，而集合与集合之间则是"包含"或"不包含"的关系.

我们常常讨论以集合作为成员的集合，这种讨论对于加深集合概念的理解是很有好处的，为此引入幂集的概念.

定义 1 设 U 为给定的论域，由 U 的所有子集为元素构成的集合称为 U 的幂集，记为 $\mathscr{P}(U)$.

例如，设 $U = \{a,b,c\}$，则

$$\mathscr{P}(U) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

$\mathscr{P}(U)$ 中每一个元素，实际上都是 U 的子集合，可见元素与集合也具有相对性.

另外，由于 U 本身是人为确定的，所以若缩小 U 为其子集 A，那么"集合 A 的幂集"的说法自然也是成立的，这时论域改换为 A. 比如取

$$A = \{a,b\} \subseteq U$$

则
$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

特别地取 $A=\varnothing$，则 $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing\}$.

于是 A 是 U 的子集有两种记法：$A \subseteq U$ 或 $A \in \mathscr{P}(U)$. 这两种记法虽然都表示同一概念，但二者是有区别的. 前者用包含的关系表达，说明 A 与 U 处于同一层次，后者用属于关系描述，说明 A 与 $\mathscr{P}(U)$ 处于不同的层次.

1.2 集合运算

定义2 设 A、$B \in \mathscr{P}(U)$，由 A 与 B 中元素的全体所构成的集合称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B \triangleq \{u \mid u \in A \text{ 或 } u \in B\}$$

由 A 与 B 中公共元素所构成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B \triangleq \{u \mid u \in A \text{ 且 } u \in B\}$$

由论域 U 中凡不属于集合 A 的元素构成的集合称为 A 的余集，记为 A^c，即

$$A^c \triangleq \{u \mid u \notin A\}$$

由 A 中凡不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A \setminus B$，即

$$A \setminus B \triangleq \{u \mid u \in A \text{ 且 } u \notin B\}$$

1.3 Descartes 乘积（直积）

两集合间除了上面提到的并、交、余运算外，还有一种运算，即所谓 Descartes 乘积.

先看一个实际例子.

例如扑克牌有四种花色，它们组成一个集合

$$U = \{黑桃,红桃,方块,梅花\}$$

牌的大小有 13 种（大、小王除外），它们组成另一个集合

$$V = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A\}$$

而具体到一张牌，则是 U 和 V 中元素“搭配”而成的，记作（红桃，3）、（方块，A）、（梅花，K）、…，总共有 $4\times 13=52$ 种，它们既非 U 的元素，也非 V 的元素，而是由 U 和 V 的元素搭配起来的新元素. 我们把这些元素组成的集合记作 W，并称 W 是 U 和 V 的 Descartes 乘积（或直积），记为 $W=U\times V$.

仿此，一般地有下面的定义.

定义 3 设 A、B 为两集合，记

$$A\times B \triangleq \{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$$

称 $A\times B$ 为 A 与 B 的 Descartes 乘积（或直积）.

易见，Descartes 乘积也是一个集合，它的元素 (a, b)（通常称为“序偶”）是由在 A 中取一个元素 a，在 B 中取一个元素 b，然后把它们搭配起来组成的. 所有这些新元素 (a, b) 的全体构成的集合，就是 $A\times B$.

要注意，“序偶”是有顺序的，一般 $(a,b)\neq(b,a)$.

两个集合的直积可推广到多个集合上去，设 A_1，A_2，…，A_n 是 n 个集合，则

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n \triangleq \{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in A_1\\ x_2\in A_2,\cdots,x_n\in A_n\}$$

例 1 设集合 $A=\{0,1\}, B=\{a,b\}, C=\{*,\nabla,\Delta\}$，求 $A\times B\times C$.

解 $A \times B \times C = \{(0,a,*),(0,b,*),(1,a,*),$
$\cdots,(1,b,\Delta)\}$

它是由 12 个元素组成的集合.

1.4 集合间的映射

映射概念是函数概念的推广，它是集合间的一种对应关系.

1.4.1 映射的定义

定义 4 给定集合，A，B，若对 $\forall a \in A$，存在一个对应法则 f，使得有唯一确定的 $b \in B$ 与其对应，则对应法则 f 称为从 A 到 B 的映射，记为

$$f: A \to B \quad a \mapsto f(a) = b$$

这里 $A \to B$ 指明 f 是从 A 到 B 的映射，$a \mapsto b$ 则指明具体的对应法则. A 称为**映射** f 的定义域，记为 D_f 而 $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$ 称为 f 的值域，记为 R_f，且 $a \in A$ 称为原象，$f(a) = b \in B$ 称为 a 在映射 f 下的象.

下面是三个特殊的映射：

①**满射** 满射是指 $f(A) = B$，也称为全射，即 f 的值域复盖 B；

②**单射** 单射是指若 $f(a_1) = f(a_2)$，则 $a_1 = a_2$，就是说不同的原象将映射为不同的象；

③**一一对应** 若 f 是单射又是满射，则 f 称为从 A 到 B 的一一对应（或满单射）.

例 2 设集合 $A = \{1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots\}$，$B = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，问从 A 到 B 的映射 $b = f(a) = 1/a$ 是否为满射.

解 这里 f 不是从 A 到 B 的满射，因为没有一个确定的原象 a 以 0 为象，但是 f 是从 A 到 B 的单射，因为不同的原象必有不

同的象与之对应，也就是说对于任意不相等的 $a_k = 1/k, a_{k+l} = 1/(k+l)$，则对应的 $b_k = k, b_{k+l} = k + l$ 也不相等.

1.4.2 逆映射和复合映射

定义 5 设 f 为由 A 到 B 的满单射，则对 $\forall\ b = f(a) \in B$，都对应着唯一的 $a \in A$ 而构成一个映射，这个映射称为 f 的逆映射，记为 f^{-1}，即

$$f^{-1}: B \to A \quad b \mapsto f^{-1}(b) = a$$

这时 $R_{f^{-1}} = D_f$ 而 $D_{f^{-1}} = R_f$.

需注意，只有满单射才存在逆映射.

定义 6 设 $f: A \to B, g: B \to C$ 为两个映射. 若对 $\forall a \in A$，通过 f 有唯一的 $b = f(a) \in B, b = f(a)$ 又通过 g 而对应着唯一的 $g(b) = g(f(a)) \in C$，这样，通过 f，g 就确定了一个由 A 到 C 的新的映射，此映射称为 f 与 g 的复合映射，记为 $g \circ f$，即

$$g \circ f: A \to C \quad a \mapsto (g \circ f)(a) = c$$

应该注意到，当且仅当 $R_f = D_g$ 时，复合映射才有意义.

比如，若 X 为某邮局所有寄往某一地区的包裹的集合，Y 为包裹重量集，Z 为邮费集. 且令映射 f(称重量)$: X \to Y \quad x \mapsto f(x) = y \in Y$，$g$(算邮费)$: Y \to Z \quad y \mapsto g(y)$，则复合映射

$$g \circ f: X \to Z \quad x \mapsto (g \circ f)(x)$$

为包裹集到邮费集的映射.

1.4.3 映射的扩张

映射可以从两个方面进行推广，一方面是把一个从 U 到 V 的映射直接扩张成从 $\mathscr{P}(U)$ 到 $\mathscr{P}(V)$ 的映射；另一方面是从映射本身进行扩张. 以后我们将会看到，这种推广是很有益处的.

定义 7 （经典扩张原理）设 U、V 为非空集，给定映射

$$f: U \to V \quad u \mapsto v = f(u)$$

称从 $\mathscr{P}(U)$ 到 $\mathscr{P}(V)$ 的新映射

$$F: \mathscr{P}(U) \to \mathscr{P}(V)$$

$$A \mapsto B = F(A) = \{v \mid v \in V, \exists u \in A, v = f(u)\}$$

为 f 的一个扩张，也称 F 是由 f 诱导出的. 这里由 f 诱导出的新映射 F 是子集与子集的对应，即对于 U 的任一子集 A，通过 F 都有 V 中唯一确定的子集 B 与 A 对应.

例 3 设 $U = \{1,2,3\}, V = \{2,4,6\}$ 为两集合，给定映射

$$f: U \to V \quad u \mapsto 2u = v$$

求由 f 扩张而成的从 $\mathscr{P}(U)$ 到 $\mathscr{P}(V)$ 的映射.

解 根据定义，由 f 扩张的映射为

$$\{1\} \mapsto \{2\} \quad , \quad \{1,2\} \mapsto \{2,4\}$$

$$\{2\} \mapsto \{4\} \quad , \quad \{1,3\} \mapsto \{2,6\}$$

$$\{3\} \mapsto \{6\} \quad , \quad \{2,3\} \mapsto \{4,6\}$$

$$\varnothing \mapsto \varnothing \quad , \quad U \mapsto V$$

定义 8 设集合 U、V 是非空的，映射

$$f: U \to \mathscr{P}(V) \quad , \quad u \mapsto f(u) = B$$

称为从 U 到 V 的点-集映射.

这里 f 是点与集的对应. 即对于 U 的任一元素 u，通过 f，都有 V 中唯一确定子集与 u 对应.

例 4 设 $U = \{a,b,c,d\}$， $V = \{1,2,3\}$ 为两集合，于是

$$\mathscr{P}(V) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \{1,2,3\}\}$$

求从 U 到 V 的一个点-集映射.

解 令 $f: a \mapsto \{1\}$， $c \mapsto V$， $b \mapsto \{1,2\}$， $d \mapsto \varnothing$. 则 f 是从 U 到 V 的一个点-集映射.

易见，当一个从 U 到 V 的点-集映射的全部象都是单点集时，这个点-集映射便自然地对应于一个从 U 到 V 的普通映射，这正

好表明点-集映射是普通映射的推广.

定义 9 设集合 U、V 是非空的，映射

$$T: \mathscr{P}(U) \to \mathscr{P}(V) \quad A \mapsto T(A) = B$$

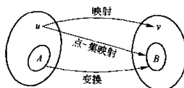
称为从 U 到 V 的集合变换.

由定义 9 可知，从 U 到 V 的集合变换 T 也是从 $\mathscr{P}(U)$ 到 $\mathscr{P}(V)$ 的映射，即对于 U 中任一子集，通过 T，都有 V 中唯一确定的子集 B 和 A 对应，因此，f 的扩张 F 也可叫做由映射 f 诱导出的集合变换.

例如 设 $U = \{a,b\}, V = \{1,2,3\}$，令

$T: \varnothing \mapsto \varnothing$, $\{b\} \mapsto \{1,2\}$, $\{a\} \mapsto \{1\}$, $U \mapsto V$ 则 T 是从 U 到 V 的集合变换.

映射、点-集映射和变换可用附图 1-1 直观表示.



附图 1-1 映射、点-集映射、变换示意图

1.5 特征函数

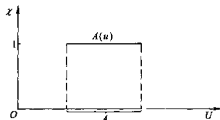
现在给出集合的特征函数，它将在推广普通集合概念为模糊集合概念时起重要作用.

定义 10 设 $A \in \mathscr{P}(U)$，定义映射

$$\chi_A: U \to \{0,1\}$$

$$u \mapsto \chi_A(u) = \begin{cases} 1, & u \in A \\ 0, & u \notin A \end{cases}$$

χ_A 称为集合 A 的特征函数（参见附图 1-2）.



附图 1-2　特征函数图

A 的特征函数χ_A也称为A的隶属函数. χ_A在u处的值$\chi_A(u)$叫做u对A的隶属度. 当u属于A, u的隶属度$\chi_A(u) = 1 = 100\%$，表示u绝对隶属于A, 当u不属于A, u的隶属度$\chi_A(u) = 0$，表示u绝对不属于A. 为书写方便，以后把χ_A和$\chi_A(u)$均简记为$A(u)$.

显然由特征函数的定义知，对U的任一子集A，都存在唯一的特征函数$A(u)$；反之，任何一个特征函数都唯一确定一个U的子集. 这是因为当已知一个集合的特征函数时，通过各个元素的特征函数取值，可清楚地勾划出一个集合，如已知

$$A(u) = \begin{cases} 1, & u^2 - u - 2 \geqslant 0 \\ 0, & u^2 - u - 2 < 0 \end{cases}$$

就说明$A = \{u \mid u \geqslant 2 \text{ 或 } u \leqslant -1\}$.

特别的，对于$\forall u \in U$，显然有$A(u) = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$; $A(u) = 1 \Leftrightarrow A = U$.

上述表明，集合间的关系和运算与其特征函做间的关系和运算相一致，即对于$\forall u \in U$，有

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A(u) \leqslant B(u)$,　$A = B \Leftrightarrow A(u) = B(u)$

(2) $A \cup B \Leftrightarrow (A \cup B)(u) = A(u) \vee B(u)$

(3) $A \cap B \Leftrightarrow (A \cap B)(u) = A(u) \wedge B(u)$

(4) $A^c \Leftrightarrow A^c(u) = 1 - A(u)$

其中运算符号"∨"（∧）称为取大（小），是指在$A(u)$与$B(u)$中通过比较取大（小）值之意.

下面根据特征函数的定义，仅给出上述（2）式的证明.

证（2）　设$A、B \in \mathscr{P}(U)$，分两种情况：

①设$u \in (A \cup B)$，因为

$u \in (A \cup B) \Leftrightarrow u \in A$或$u \in B$

从而$A(u) = 1$或$B(u) = 1$，所以

$$(A \cup B)(u) = 1 = A(u) \vee B(u)$$

②设$u \notin A \cup B$，因为

$$u \notin (A \cup B) \Leftrightarrow u \notin A \text{且} u \notin B$$

从而$A(u) = 0$且$B(u) = 0$，所以

$$(A \cup B)(u) = 0 = A(u) \vee B(u)$$

附录2　普通关系

2.1　普通二元关系

客观世界中各客体之间普遍存在着某种联系，这种联系就称为关系，其中最简单的就是二元关系. 如父子关系，数之间的大小关系，集合间的包含关系等等，都是二元关系. 那么在数学上如何来描述这些关系呢？回忆一下在第一章中我们曾介绍过的Descartes乘积$A \times B$. 所谓Descartes乘积是指在集合A中任取一元素a，在集合B中任取一元素b，然后把它们搭配起来的所有对子集（a，b）而构成的集合$A \times B$，这里对元素的搭配没加任何限制. 如果对元素间的搭配再施加某些限制，这时构成的集合是$A \times B$的一个子集. 此子集具有某种特殊的性质，其性质的内容包含于搭配的限制之中，它反映了A、B中元素间的某种特殊

联系，这种联系就是所说的关系.

比如设 A、B 均为男子的集合，则

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

为任何两个男子组成的对子的集合.

现对这种搭配加以限制，如限制“兄弟”才能搭配，它体现了“男子”与“男子”之间的一种特殊关系，并不是任何两个男子都具有“兄弟”关系，因此具有“兄弟”关系这一特殊的集合构成了 $A \times B$ 的一个子集. 即若记 R = “兄弟” = $\{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a$ 是 b 的哥哥$\}$，则 $R \subseteq A \times B$.

关系也是一个集合，它是 Descartes 乘积的一个子集.

定义 11 设 A、B 是两个非空集合，$A \times B$ 的子集 R 称为从 A 到 B 的一个二元关系，记作

$$A \xrightarrow{R} B$$

当 $(a,b) \in R$ 时，a 与 b 称为有关系 R，记作 aRb，当 $(a,b) \notin R$ 时，称 a 与 b 没有关系 R，记作 $a\bar{R}b$.

若 R 是从 A 到 A 的一个关系时，则简称 R 为 A 上的关系，如“兄弟”关系就是集合“男子”上的关系.

例 5 设 X 为实数集，易知

$$R^{(1)} = \{(x,y) \mid (x,y) \in X \times X, \quad x = y\}$$

是 X 上元素间的“相等”关系.

$$R^{(2)} = \{(x,y) \mid (x,y) \in X \times X, \quad x \geqslant y\}$$

是 X 上元素间的“大于或等于”关系.

例 6 设 $U = \{$张三，李四，王五$\}$，$V = \{$优，良，中，差$\}$，于是 $U \times V$ 就是张三、李四、王五这三个人考试中所可能出现的考试结果，共有 $3 \times 4 = 12$ 种情况，设在某次考试中，张三得“优”，李四、王五得“中”，则

$$R = \{(张三,优),(李四,中),(王五,中)\}$$

是 $U \times V$ 的一个子集，即从 U 到 V 的一个关系.

对于任意的 $(a,b) \in A \times B, R \subseteq A \times B$，$a$ 与 b 有关系 R，a 与 b 没有关系 R，二者必居其一，且仅居其一. 关系 R 的特征函数为

$$R(a,b) = \begin{cases} 1, & (a,b) \in R \\ 0, & (a,b) \notin R \end{cases}$$

于是关系 R 可以看作是从 $A \times B$ 到 $\{0, 1\}$ 的一个映射.

还须说明一点，除二元关系外，尚有三元关系…n 元关系.

2.2 关系的矩阵表示

有限集之间的关系，可用矩阵表示.

设集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 到集合 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ 存在着关系 R，我们先列出附表 2-1.

附表 2-1　集合间的关系

R	b_1	b_2	…	b_m
a_1	u_{11}	u_{12}	…	u_{1m}
a_2	u_{21}	u_{22}	…	u_{2m}
⋮	⋮	⋮		⋮
a_n	u_{n1}	u_{n2}	…	u_{nm}

其中

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

当 $u_{ij} = 1$ 时，表示 a_i 与 b_j 有关系 R；当 $u_{ij} = 0$ 时，表示 a_i 与 b_j 没有关系 R. 这样，A 到 B 的关系 R 就用上表清楚地表示出来了. 然后把此表写成我们熟悉的矩阵形式，记此矩阵为 M_R，且

称 M_R 为关系 R 的矩阵，即

$$M_R = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nm} \end{pmatrix}$$

为简单起见，在一般性讨论中，M_R 常记为 $M_R = (u_{ij})_{n\times m}$，其中

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

特别地，$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上的关系 $R \subseteq A \times A$，其矩阵为一 n 阶方阵 $M_R = (u_{ij})_{n\times n}$，其中

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, a_j) \in R \\ 0, & (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

例 6 中三个学生考试结果的关系矩阵为

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中行自上而下为学生张三、李四、王五，列自左至右为成绩优、良、中、差.

2.3 关系的合成（复合关系）

设 U 是某一人群，弟兄（R）、父子（Q）是 U 上的两个普通关系，而叔侄（S）也是 U 上的一个普通关系．在这三个关系中，有这样的联系：a 是 c 的叔叔（$(a,c) \in S$）当且仅当至少有

一个 b，使 b 是 a 的哥哥（$(a,b)\in R$），且 b 是 c 的父亲（$(b,c)\in Q$）．我们称叔侄关系是弟兄关系对父子关系的合成，记为

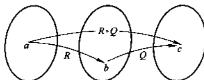
$$叔侄 = 弟兄 \circ 父子$$

把这种合成关系抽象成数学形式，即为如下定义．

定义 12 设 R 是由集合 A 到集合 B 的关系，Q 是由集合 B 到集合 C 的关系．对于 $a\in A$ 及 $c\in C$，存在 $b\in B$，使得 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in Q$，这时通过 b，a 与 c 的关系就叫做关系 R 与 Q 的合成（复合），它是由 A 到 C 的一个关系，记为 $R\circ Q$，即

$$R\circ Q = \{(a,c) \mid \exists b\in B, 使(a,b)\in R 且(b,c)\in Q\}$$

合成关系可由附图 2-1 直观表示．



附图 2-1 合成关系图示

$R\circ Q$ 是 Descartes 积的子集，其特征函数为

$$(R\circ Q)(a,b) = \bigvee_{b\in B}(R(a,b)\wedge Q(b,c)) \qquad \text{(a)}$$

关系 R 与其自己的合成 $R\circ R$，叫做关系 R 的幂，记为 R^2，即 $R^2 = R\circ R$，类似地可定义 n 次幂的运算 $R^n = R^{n-1}\circ R$．

如果两关系均用矩阵表示，则复合关系可用矩阵的“乘法”运算得到．

例 7 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$，$Z=\{z_1,z_2,z_3\}$，X 到 Y 的关系 $R=\{(x_2,y_3),(x_3,y_1),(x_4,y_3)\}$，$Y$ 到 Z 的关系 $Q=\{(y_2,z_3),(y_3,z_1)\}$，求 $R\circ Q$．

解 R 与 Q 的关系矩阵分别为

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

按两矩阵的乘法运算规则，将其中的“乘”，换成“∧”，“加”换成“∨”，则有

$$M_R \circ M_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{R \cdot Q}$$

从而 $R \circ Q = \{(x_2,z_1),(x_4,z_1)\}$，这与由式（a）直接运算得到的结果一致（读者自己验证）.

定义 13 设 R 是一个从集合 A 到集合 B 的关系，从 B 到 A 的关系 $\{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ 称为关系 R 的逆关系，记为 R^{-1}，即

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

2.4 等价关系、划分

等价关系是二元关系中的一个重要关系．所谓 R 为等价关系是指关系 R 同时具有自反性、对称性和传递性．下面给出三个性质的定义．

定义 14 设 R 是非空集 A 上的关系 ($R \in \mathscr{P}(A \times A)$).

(1) 若对 $\forall\ a \in A$, 都有 $(a,a) \in R$, R 称为自反的, 否则 R 称为非自反的;

(2) 对任意 a、$b \in A$, 若有 $(a,b) \in R$, 则必有 $(b,a) \in R$, R 称为对称的, 否则 R 称为非对称的;

(3) 对任意 a、b、$c \in A$, 若 $(a,b) \in R$ 且 $(b,c) \in R$, 则必有 $(a,c) \in R$, R 称为传递的, 否则 R 称为非传递的.

定义 15 设 R 是非空集 A 上的关系, 若 R 为自反的、对称的、传递的, 则 R 称为 A 上的等价关系.

例 8 在整数集 Z 上"任意两数 x, y 除以 $k \in Z$ 而余数相等", 叫做 x 与 y 关于 k 同余, 记为 $x \equiv y(\mathrm{mod}k)$. "关于 k 同余"一般记为 $\equiv$ $(\mathrm{mod}k)$. 易见整数集上关于 k 同余关系"$\equiv (\mathrm{mod}k)$"为等价关系.

定义 16 设 R 是集合 A 上的等价关系, 对任意 $x \in A$, 在 A 中一切与 x 有等价关系 R 的元素组成的集合, 称为"由 x 产生关于 R 的等价类", 记为 $[x]_R$, 即

$$[x]_R = \{y \mid y \in A, (x,y) \in R\}$$

例 9 考虑自然数集 N 上的同余关系"$\equiv (\mathrm{mod}3)$"的等价类.

解 因为任何数除以 3, 其余数只可能是 0、1、2, 所以在集合 N 上只有 0、1、2 产生关于 $\equiv$ $(\mathrm{mod}3)$ 的三个等价类 (这里约定 $0 \in N$):

$$[0]_{\equiv(\mathrm{mod}3)} = \{y \mid y \equiv 0(\mathrm{mod}3)\} = \{0,3,6,\cdots\}$$

$$[1]_{\equiv(\mathrm{mod}3)} = \{y \mid y \equiv 1(\mathrm{mod}3)\} = \{1,4,7,\cdots\}$$

$$[2]_{\equiv(\mathrm{mod}3)} = \{y \mid y \equiv 2(\mathrm{mod}3)\} = \{2,5,8,\cdots\}$$

在上例中我们发现这三个等价类有如下特点:

(1) $[0] \cup [1] \cup [2] = N$(省略了 $\equiv (\mathrm{mod}3)$);

(2) $[n_i] \cap [n_j] = \varnothing(n_i \neq n_j;\ \ n_i、n_j = 0,1,2)$.

即三个等价类（N 的三个子集）之并集包含了 N 中全部元素，且任何两子集都无公共元素，我们称这三个子集组成的集合为 N 的一个划分.

定义 17 设 A 是一个非空集，而 A_i（$i \in K$，指标集 K 可以是有限的，也可以是无限的）是集合 A 的某些非空子集，如果

$$\bigcup_{i\in K} A_i = A$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$$

则集合 $\{A_i\}_{i\in K}$ 称为集合 A 的一个划分，而 $A_i (i \in K)$ 叫做这个划分的一个类.

例 10 设 $A = \{a,b,c,d\}$，则集合 $\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$ 是集合 A 的一个划分.

下面是一个很重要的结论.

定理 1 设 R 是集合 A 上的等价类，则等价类的集合 $\{[a]_R | a \in A\}$ 构成 A 的一个划分.

证 分三步证明，先证任意 $[a]_R$ 非空集，再证两个不同等价类之交集必为空集，最后证一切等价类之并集等于集合 A.

(1) 因为 R 为等价关系，所以对 $\forall a \in A$ 必有 $(a,a) \in R$，即 $a \in [a]_R$，$[a]_R$ 非空.

(2)（用反证法）假设 $[a]_R$ 及 $[b]_R$ 为两个不同等价类，但 $[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$，则 $[a]_R$ 和 $[b]_R$ 必有公共元素 $c \in A$，于是 $(a,c) \in R, (c,b) \in R$. 又由 R 的传递性得 $(a,b) \in R$，这表明 $[a]_R$ 与 $[b]_R$ 为同一等价类，与假设矛盾，故 $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$.

(3) 显然对所有 $a \in A$，$\bigcup_{a\in A} [a]_R \subseteq A$. 另一方面对 $\forall x \in A$，有 $x \in [x]_R$，而 $[x]_R \subseteq \bigcup_{a\in A} [a]_R$，所以 $x \in \bigcup_{a\in A} [a]_R$，从而 $A \subseteq \bigcup_{a\in A} [a]_R$，于是 $\bigcup_{a\in A} [a]_R = A$.

由等价关系 R 构成集合 A 的划分，也叫做集合 A 关于 R 的商集，记为 A/R，即

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

定理说明利用等价关系可对集合 A 的元素进行分类（即把彼此等价的元素归为一类），且分成的若干类（子集）中任两不同的类均不相交，而这些类的并集正好为 A. 此外如果对一集合分类的标准不同，那么分类的粗细程度是不一样的.

2.5 序关系

序关系是集合论中另一个重要概念，它虽较抽象，但对我们来说并不陌生，在日常生活或工作中经常碰到. 比如人们在列队时通常是按个子的“高矮”来进行，即先两两比较，然后按“高矮”定出一个顺序. 这里实际上就是在由所有列队者的身高（实数）组成的集合上，根据实数集中的关系“$\leqslant$”，定出大小顺序. 我们就称这个能定出顺序的关系“$\leqslant$”为序关系. 又如英文 26 个字母组成的集合上的“前后”关系；集合 A 的幂集上的“$\subseteq$”关系，都将集合中的元素排出了一种顺序，因此它们都是序关系.

序关系有偏序关系和全序关系之分. 全序关系把集合中的一切元素都排成序，偏序关系则只能给出部分元素间的顺序. 下面是偏序关系的定义.

定义 18 设 R 是集合 A 上的一个关系 $(R \subseteq A \times A)$，如果对任意 a、b、$c \in A$，关系 R 都满足下面三个条件：

(1) $(a,a) \in R$(R 是自反的).

(2) 若 $(a,b) \in R$, 且 $(b,a) \in R$，则 $a = b$（R 是反对称的).

(3) 若 $(a,b) \in R$, 且 $(b,c) \in R$, 则 $(a,c) \in R$(R 是传递的).

则 R 称为集合 A 上的偏序关系，用记号“$\prec$”表示. 若 a、$b \in A$ 有偏序关系，我们记为 $a \prec b$，称为 a 在 b 前面，或称 b 在 a 后面.

集合 A 与偏序关系 $\prec$ 组成的二元结构（A, $\prec$）称为偏序集，偏序集有时也简记为 A.

例 11 设 $N = \{2,3,4,6,8,12\}$，验证 N 上整除关系 R 为偏序关系（x 整除 y，记为 $x \mid y$）.

证 设 x、y、$z \in N$，

(1) 因为 $x \mid x$ 所以 $(x,x) \in R$（R 是自反的）；

(2) 若 $(x,y) \in R$ 且 $(y,x) \in R$，即 $x \mid y$ 且 $y \mid z$，则由整除性质知 $y = x$（R 是反对称的）；

(3) 若 $(x,y) \in R$ 且 $(y,z) \in R$，即 $x \mid y$ 且 $y \mid z$，则由整除性质知 $x \mid z$，所以 $(x,z) \in R$（R 是传递的）.

故 R 是 N 上的偏序关系.

定义 19 设在集合 A 上已建立了偏序关系 $<$，若对任意的 a、$b \in A$，$a < b$ 或 $b < a$ 总有一个成立，则这种偏序关系称为全序关系或线性序关系.

集合 A 与全序关系 $<$ 组成的二元结构（A、$<$）称为全序集，全序集有时也简记为 A.

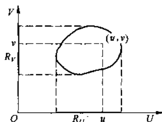
2.6 普通关系的投影与截影

定义 20 设 $R(\in \mathscr{P}(U \times V))$ 是 U 到 V 的普通关系，

$$R_U \triangleq \{u \mid \exists (u,v) \in R\}, R_V \triangleq \{v \mid \exists (u,v) \in R\}$$

分别称为 R 在 U 和 V 中的投影.

附图 2-2 给出 R_U 与 R_V 的几何解释. 又由定义，显然有



附图 2-2 投影示意图

$$R_U(u) = \bigvee_{v \in V} R(u,v), \quad R_V(v) = \bigvee_{u \in U} R(u,v)$$

定义 21 设 $R \in \mathscr{P}(U \times V)$，对固定的 u 和 v，

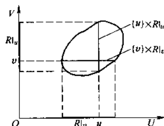
$$R|_u = \{v \mid (u,v) \in R\}, \quad R|_v = \{u \mid (u,v) \in R\}$$

分别称为 R 在 u 和 v 处的截影.

附图 2-3 给出 $R|_u$ 与 $R|_v$ 的几何解释，显然有

$$R|_u(v) = R(u,v), \quad R|_v(u) = R(u,v).$$

当 U、V 为有限时，投影与截影都可用向量表示.



附图 2-3 截影示意图

例 12 设

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

（列依次为 $v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4$）

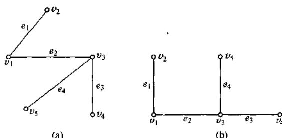
则
$$R_U = (1,1,0)^T, \quad R_V = (1,1,1,1)$$
$$R|_{v_1} = (1,0,0)^T, \quad R|_{u_3} = (0,0,0,0)$$

附录 3 普通图论基础

3.1 图的概念

所谓图是指由一些点（称为结点，用 v 表示），和连接这些

点的一些线段（称为边，用 e 表示，每一条边连接着两个结点）组成的数学结构. 如果把这些点和边都画在平面上，那么图便可用平面上的几何图形来表示. 例如附图 3-1（a）就是由五个结点及四条边组成的图形.



附图 3-1　图的几何表示

在图论中我们所关心的是那些结点和结点之间的连通关系，至于结点的相互位置及边的几何形状等，在我们的研究过程中是无关紧要的，因此图可用结点的集合及边的集合给出. 如图 3-1（a)所表示的图就可用结点集合 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 及边的集合 $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,\}$ 给出. 又因为每一条边都连接着两个结点，所以边的集合又可以用"无序结点对"的集合来代替. 上例中边的集合可由 $E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_5)\}$ 代替（这里的每个（v_i，v_j）都是无序的）. 下面给出图的定义.

定义 22　由非空有限结点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 以及有限的边的集合 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 所组成的有序二元组 $G=\{V,E\}$ 称为一个图，其中每条边用一无序结点对 $e_i=(v_{i1},v_{i2})(i=1,2,\cdots,m)$ 代替，故边集 E 又可用无序结点对集合

$$E=\{(v_{i1},v_{i2})\mid v_{i1},v_{i2}\in V,\quad i=1,2,\cdots,m\}$$

表示，这样的图也叫无向图，其中的边叫无向边.

一个图用图形表示，可有多种不同形式. 如前面的例，它的

图形也可画成附图 3-1(b) 的形状. 把一个图的图形画出来, 会给我们的研究带来很多方便.

3.2 图论中的几个常用术语

(1) 有向图 用一个有序结点对表示的边称为有向边. 若一个图中每一条边均系有向边, 则这样的图称为有向图.

(2) 关联与邻接 一条边 $e_i=(v_{i1},v_{i2})$ 连接两个结点 v_{i1}, v_{i2}, 称边 e_i 与结点 v_{i1}, v_{i2} 相关联, 而结点 v_{i1}, v_{i2} 叫邻接的.

(3) 有向图的通路与回路 在有向图 $G=(V,E)$ 中, 一个边的序列 $(v_{i0},v_{i1}),(v_{i1},v_{i2}),\cdots,(v_{i,k-1},v_{ik})$, 如果其中每条边的终点是下一条边的起点, 那么这个边的序列称为由结点 v_{i0} 到结点 v_{ik} 的一条通路 (或路). 在一条通路中, 如果起点与终点相同 $v_{i0}=v_{ik}$, 该通路就叫一个回路.

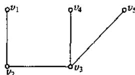
(4) 可达性与连通图 若从结点 v_i 到 v_j 存在一条通路, 称为从 v_i 到 v_j 是可达的. 一个无向图 G 如果它的任何两点间均为可达的, 图 G 称为连通图, 否则称为非连通图.

(5) 子图 图 $G=(V,E)$ 及 $G'=(V',E')$ 间, 如果 $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$, 图 G' 称为图 G 的子图.

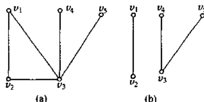
3.3 树的概念

定义 23 不包含回路的连通图称为树.

附图 3-2 是树, 但附图 3-3 (a) 及 (b) 都不是树, 这是因



附图 3-2 树



附图 3-3 非树图

为附图 3-3（a）中有回路，附图 3-3（b）为非连通图.

由定义可知，所谓树乃是一种特殊的无向图，在有向图中如果不考虑边的方向而构成树，则称该有向图为有向树.

在一个连通图 $G = (V,E)$ 中，去掉所有的回路（在回路中删去一条边），所得的树 T，叫做图 G 的生成树.

附录 4　普通线性规划

4.1　普通线性规划的数学模型

线性规划是运筹学中形成最早且应用很广泛的一个重要分支，它的理论与算法都已比较成熟．其数学模型的一般形式为：

目标函数　$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

上式中的“$\leqslant b_i$”可改为“$\geqslant b_i$”或“$= b_i$”$(i = 1,2,\cdots,m)$．求一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值满足约束条件，且使得目标函数 z 取得最大（或最小）.

若记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$，则线性规划的数学模型可简记为

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

其中，"$\leqslant b$" 可改为 "$\geqslant b$" 或 "$= b$".

我们称下面的数学模型为线性规划问题的标准形式.

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

假设 $m \leqslant n, b \geqslant 0, A$ 的秩为 m. 线性规划的一般形式总可以通过变换和引进一些新的变量化为标准形式.

下面介绍一些基本概念和结论.

定义 24 满足线性规划式（b）约束条件的解称为式（b）的可行解. 而使目标函数达到最大值的可行解称为最优解.

定义 25 A 的任意一个 $m \times m$ 非奇异子矩阵 B 称为线性规划（b）的一个基. 若变量 x_j 所对应的列包含在基 B 中，则 x_j 称为 B 的基变量；否则，x_j 称为 B 的非基变量. 由基 B 出发，把所有非基变量取做零，所得的新方程组的唯一解称为式（b）对应于基 B 的基本解.

显然，式（b）的基本解的个数是有限的，它不会超过 C_n^m 个.

定义 26 若基本解又是可行解，则称为基可行解，其基称为可行基. 若基可行解是最优解，其基称为最优基.

可以证明：若式（b）有可行解. 则一定有基可行解. 若式（b）有最优解，则一定存在一个基可行解是最优解.

4.2　解线性规划的单纯形方法

单纯形方法是求解线性规划问题的一般方法，我们举一例来说明，而不打算从理论上讨论它.

例 13　某工厂生产 A，B 两种产品，具体条件见附表 4-1.

附表 4-1　生产条件

项　目	生产1t A 产品	生产 1tB 产品	供应限额
煤/t	4	9	360
电力/kW	5	4	200
钢材/t	10	3	300
获利/千元	12	7	

问：在所供应限额的条件下，生产多少吨 A 和多少吨 B 产品才能获利最大？

解　设生产 A 产品 x_1（t），B 产品 x_2（t），获利 z 千元，于是问题归结为

$$\begin{cases} \max z = 12x_1 + 7x_2 \\ 4x_1 + 9x_2 \leqslant 360 \\ 5x_1 + 4x_2 \leqslant 200 \\ 10x_1 + 3x_2 \leqslant 300 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{c}$$

引入变量 x_3，x_4，x_5 得到式（c）的标准形式

$$\begin{cases} \max z = 12x_1 + 7x_2 \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 = 360 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 200 \\ 10x_1 + 3x_2 + x_5 = 300 \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

应用单纯形方法求解线性规划问题的具体步骤如下：

第一步　写出初始矩阵 T_0，找一个基可行解.

$$
T_0 = \begin{matrix} \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix}
\begin{pmatrix}
\overset{x_1}{12} & \overset{x_2}{7} & \overset{x_3}{0} & \overset{x_4}{0} & \overset{x_5}{0} & \vline & 0 \\
\hline
4 & 9 & 1 & 0 & 0 & \vline & 360 \\
5 & 4 & 0 & 1 & 0 & \vline & 200 \\
10 & 3 & 0 & 0 & 1 & \vline & 300
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ 90 \\ 40 \\ 30 \end{matrix}
$$

说明　(1) 矩阵

$$
\begin{pmatrix}
4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\
10 & 3 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
4 & 9 & 1 & 0 & 0 & 360 \\
5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 200 \\
10 & 3 & 0 & 0 & 1 & 300
\end{pmatrix}
$$

分别是约束条件方程组的系数矩阵和增广矩阵.

(2) 系数矩阵上方的元素 12，7，0，0，0 分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 在目标函数中的系数，称为检验数.

(3) 矩阵右边的数是由增广矩阵最后一列元素除以最左边的一个正检验数所在列的相应正元素得到的（若此列的元素含有负数和零，则空着不写，若某列检验数大于零，而其他元素都不大于零，则问题无最优解）.

(4) 系数矩阵的后三列为单位向量，构成一个基，它的基变量 x_3，x_4，x_5 写在矩阵的左边. 对应该基的基本解 $x^0 = (0,0,0,360,200,300)^T$，因 $x_3 = 360 \geqslant 0$，$x_4 = 200 \geqslant 0$，$x_5 = 300 \geqslant 0$，故 x^0 是一个基可行解.

(5) 对应于基可行解的目标函数值取负号写在矩阵 T_0 的右上角（对应于 x^0 的目标函数值 $z = 0$）.

第二步　判断是否最优．当检验数均为小于等于零时，其基可行解为最优解．由于 T_0 中有大于零的检验数，故 x^0 不为最优解，要进行换基运算．

第三步　换基，即将某个非基变量与某个基变量调换．矩阵右边数中最小者所对应的行与最左边正的检验数所在列交叉的元素称为主元，主元所在列（称为主列）对应的非基变量称为进基变量，主元所在行对应的基变量称为离基变量（T_0 中的主元为10，进基变量为 x_1，离基变量为 x_5）．用初等行变换把主元化为1，主列的其他元素均化为0，于是得到一个新矩阵．

$$T_1 = \begin{matrix} \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3.4 & 0 & 0 & -1.2 & -360 \\ \hline 0 & 7.8 & 1 & 0 & -0.4 & 240 \\ 0 & 2.5 & 0 & 1 & -0.5 & 50 \\ 1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.1 & 30 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 30.8 \\ 20 \\ 100 \end{matrix}$$

这样就达到了换基的目的．

再重复上述过程，则有

$$T_2 = \begin{matrix} \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -1.36 & -0.52 & -428 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -3.12 & 1.16 & 84 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 & -0.2 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & -0.12 & 0.16 & 24 \end{array}\right)$$

由于 T_2 中的检验数均小于等于零，故得最优解：$x_1=24$，$x_2=20$，$x_3=84$．其最优值 $x^*=428$．

附录5　普通逻辑演算与推理句

5.1　普通命题与逻辑演算

具有真假可言的陈述句称为命题（普通命题），例如，“7是

自然数"，"雪是白的"，"7 是偶数"，"雪是黑的"都是命题，一个命题非真即假，非假即真，可以明确判断，如此例的一、二命题是真的，三、四命题是假的.

普通命题的真假可用 1，0 来表示. 设 $\mathscr{U}$ 是全体命题 p 组成的集合，令

$$T:\mathscr{U}\to\{0,1\}$$

$$T(p)=\begin{cases}1, & p\text{ 是真命题}\\ 0, & p\text{ 是假命题}\end{cases}$$

$T(p)$ 称为命题 p 的真值，$\{0,1\}$ 称为真值域.

例如，若命题 p 为"5 是自然数"，则 $T(p)=1$，若命题 p 为"雪是黑的"，则 $T(p)=0$.

设论域为 U，A 为某一确切概念，陈述句"u 是 A"($u\in U$)，不是一个命题，这是因为 u 是变元，无法判断真假. 如果给 u 赋以具体对象 $u_0\in U$，那么"u_0 是 A"就是一个命题. 若用 $H(u)$ 表示陈述句"u 是 A"，则 $H(u)$ 可看作一个命题函数，$H(u)$ 在 u_0 的值，就是命题"u_0 是 A"的真值.

设 p、$q\in\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ 中的逻辑演算有如下几种：

(1)"$\neg$"(非) $\mathscr{U}\to\mathscr{U}$ $p\mapsto\neg p$，$\neg p$ 为真当且仅当 p 假；

(2)"$\vee$"(或) $\mathscr{U}\times\mathscr{U}\to\mathscr{U}$ $(p,q)\mapsto p\vee q$，$p\vee q$ 为真当且仅当 p，q 至少有一个为真；

(3)"$\wedge$"(且) $\mathscr{U}\times\mathscr{U}\to\mathscr{U}$ $(p,q)\mapsto p\wedge q$，$p\wedge q$ 为真当且仅当 p,q 同时为真；

(4)"$\to$"(蕴涵) $\mathscr{U}\times\mathscr{U}\to\mathscr{U}$ $(p,q)\mapsto p\to q$，$p\to q$ 为真当且仅当 p 真和 q 假不同时为真；

(5)"$\leftrightarrow$"(等价) $\mathscr{U}\times\mathscr{U}\to\mathscr{U}$ $(p,q)\mapsto p\leftrightarrow q$，$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p,q 真值相同；

逻辑演算法则可由真值表唯一确定(见附表 5-1).

附表 5-1 真值表

p	q	$\neg p$	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\to q$	$p\leftrightarrow q$	$(\neg p)\vee q$	$(\neg p)\vee(p\wedge q)$	$(p\to q)\wedge(q\to p)$
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1

5.2 普通推理句

"若 u 是 a,则 u 是 b"，这样的语句叫做推理句，记为（$a\to b$），其中判断句"u 是 a"和"u 是 b"分别叫做推理句（$a\to b$）的前提和结论，例如：

（1）"若 x 是偶数，则 x 能被 2 整除".

（2）"若 u 是等腰三角形，则它一定是直角三角形".

都是推理句. 在推理句（$a\to b$）中，能分辨真假的推理句，称为普通推理句.

推理句（$a\to b$）是命题（a）与（b）的蕴含式：$a\to b$ 由命题的演算规律可知：

$$(a)\to(b) = (\neg a)\vee b = (\neg a)\vee(a\wedge b)$$

因此，若（a）、（b）的真域是 A 和 B，则推理句（$a\to b$）的真域就是 $A^c\cup B$.

这也可以从真域的定义直接得出：

（$a\to b$）的真域

$=\{u \mid u\in U,(a\to b)$ 对 u 真$\}$

$=\{u\mid(\neg a)$ 对 u 真$\}\cup\{u\mid(a\wedge b)$ 对 u 真$\}$

$=A^c\cup(A\cap B)=A^c\cup B$

定义 27 若推理句（$a\to b$）的真域与论域重合，则称这推理句为定理（永真）.

显然，（$a\to b$）为真$\Leftrightarrow A\subset B$.

永真公式的各类形式都可用于作推理，这就是所谓的推理规则.

三个最常用的推理规则如下：

设 A、B、C 分别是 (a)，(b)，(c) 的真域.

(1) 假言推理规则：

$(a \to b)$ 为真，且 (a) 对 u 真 $\Rightarrow$ (b) 对 u 真.

集合解释：$A \subset B$ 且 $u \in A \Rightarrow u \in B$.

(2) 拒取式规则：

$(a \to b)$ 为真且 (b) 对 u 假 $\Rightarrow$ (a) 对 u 假.

集合解释：$A \subset B$ 且 $u \notin B \Rightarrow u \notin A$.

(3) 合成规则：

$(a \to b)$ 为真，且 $(b \to c)$ 为真 $\Rightarrow$ $(a \to c)$ 为真.

集合解释：$A \subset B$ 且 $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

推理句"若 u 是 a，则 v 是 b"涉及两个变元 u 和 v，它们可以属于不同的论域 U 和 V. 因而它们的真域应是 $U \times V$ 上的子集也就是 U 与 V 的一个关系，这样的推理句记为 $(a(u) \to b(v))$.

设 (a) 与 (b) 的真域分别是 $A \subset U$，$B \subset V$，则 $(a(u) \to b(v))$ 的真域为

$$
\begin{aligned}
R &= \{(u,v) \mid (a(u) \to b(v)) \text{ 对}(u,v)\text{ 真}\} \\
&= \{(u,v) \mid (\neg a) \text{ 对 } u \text{ 真}\} \cup \{(u,v) \mid (a) \text{ 对 } u \text{ 真且}(b) \text{ 对 } v \text{ 真}\} \\
&= \{(u,v) \mid u \in A^c, v \in V\} \cup \{(u,v) \mid u \in A, v \in B\} \\
&= (A^c \times V) \cup (A \times B)
\end{aligned}
$$

其隶属函数为

$$
\begin{aligned}
R(u,v) &= (1 - A(u)) \vee (A(u) \wedge B(v)) \\
&= (1 - A(u)) \vee B(v)
\end{aligned}
$$

例 14 设 u 为人的身高，$u \in U = [0,3]$；v 为人的体重，$v \in V = [0,500]$，求推理句"若人的身高大于 1.8，则人的体重大于 120"的真域 R.

解 人的身高大于1.8的真域$A = \{u \mid u > 1.8\} \subset U$."人的体重大于120"的真域$B = \{v \mid 120 < v \leqslant 500\} \subset V$.

$$R = (A^c \times \bar{V}) \cup (A \times B)$$
$$= \{(u,v) \mid 0 < u \leqslant 1.8,\ \ 0 \leqslant v \leqslant 500\} \cup$$
$$\{(u,v) \mid 1.8 < u \leqslant 3,\ \ 120 < v \leqslant 500\}$$

定理2 假言推理规则对于推理句$(a(u) \to b(v))$是成立的，即

$(a(u) \to b(v))$对(u,v)真且(a)对u真$\Rightarrow(b)$对v真.

证 $(a(u) \to b(v))$对(u,v)真$\Rightarrow (u,v) \in R = (A^c \times V) \cup (A \times B)$,$(a)$对$u$真$\Rightarrow u \in A$.由此,$u \notin A^c \Rightarrow (u,v) \notin A^c \times V$,但$(u,v) \in R$,故$(u,v) \in A \times B$ 从而$v \in B$.可见(b)对v真.

定理3 拒取式规则对推理句"$(a(u) \to b(v))$"是成立的，即

$(a(u) \to b(v))$对(u,v)真且(b)对v假,则(a)对u假.

证 已知$(u,v) \in R$且$v \notin B \Rightarrow (u,v) \in A^c \times V \Rightarrow u \in A^c \Rightarrow u \notin A$,即$(a)$对$u$假.

定理4 合成规则对推理句$(a(u) \to b(v))$是成立的，即

$(a(u) \to b(v))$对(u,v)真且$(b(v) \to c(w))$对(v,w)真

$\Rightarrow (a(u) \to c(w))$对$(u,w)$真.

证 $(a(u) \to b(v))$、$(b(v) \to c(w))$和$(a(u) \to c(w))$的真域分别为

$$R = (A^c \times V) \cup (A \times B)$$
$$P = (B^c \times W) \cup (B \times C)$$
$$Q = (A^c \times W) \cup (A \times C)$$

已知$(u,v) \in R$,$(v,w) \in P$,以下分两种情况说明$(u,w) \in Q$.

(1) $(u,v) \in A^c \times V$，此时 $u \in A^c \Rightarrow (u,w) \in A^c \times W \Rightarrow (u,w) \in Q$.

(2) $(u,v) \in A \times B$，此时因为 $(v,w) \in P = (B^c \times W) \cup (B \times C)$，

所以 $(v,w) \in B \times C \Rightarrow w \in C \Rightarrow (u,w) \in A \times C \subset Q$.

习题答案

习 题 1

2. $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = (0, 0.5, 0.3, 1, 0, 0, 0)$

   $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = (0.3, 0.9, 0.4, 1, 0.6, 0.7, 1)$

   $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^c \cap \underset{\sim}{C} = (0.7, 0.1, 0.6, 0, 0, 0.3, 0)$

   $(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})^c \cup \underset{\sim}{C} = (1, 0.5, 0.7, 0.2, 1, 1, 1)$

   $(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A}^c) \cup \underset{\sim}{A} = (0, 0.5, 0.3, 1, 0, 0.7, 0)$

   $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A}^c) \cap \underset{\sim}{C} = (1, 0.3, 0.6, 0.2, 0, 0.7, 0.6)$

5. $\underset{\sim}{A}^c(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$

$$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}, & x \leqslant \frac{3}{2} \\ e^{-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}, & x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}, & x \leqslant \frac{3}{2} \\ e^{-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}, & x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

   $A_{0.5} = \{x \mid 1 - 2\sqrt{\ln 2} \leqslant x \leqslant 1 + 2\sqrt{\ln 2}\}$

   $B_{0.25} = \{x \mid 2 - 2\sqrt{\ln 4} \leqslant x \leqslant 2 + 2\sqrt{\ln 4}\}$

6. supp $\underset{\sim}{A}$ = {夏，商，西周，春秋，战国，秦，西汉，东汉}

   ker $\underset{\sim}{A}$ = {夏，商}

   supp $\underset{\sim}{A} - A_1$ = {西周，春秋，战国，秦，西汉，东汉}

7. $A_{0.5} = (1, 1, 0, 1, 1, 1)$

   $A_{0.2} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$

12. $\underset{\sim}{A} = (0.7, 0.5, 1, 0.2, 0.7)$

习 题 2

1. $|\underset{\sim}{A}| = 2.7$, $\|\underset{\sim}{A}\| = 0.54$, hgt $\underset{\sim}{A} = 0.9$, dph $\underset{\sim}{A} = 0.2$,

$L(A)=0.6,\ H(A)=0.809.$

2. $0,\ \frac{1}{6}.$

3. $d_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=0.3,\ d_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=0.7,\ \delta(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=0.117,$

$D_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=0.883, D_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=0.877,$

$D_g(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=0.6.$

4. 用贴近度（3）知 $\underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A_1}$，$\underset{\sim}{A_2}$ 最贴近，用贴近度（4），（5）知 $\underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A_1}$ 最贴近.

5. 甲，乙两地天气预报评分分别为 0.993，$\triangleq 0$.

习　题　3

1. (1)

$$R\cup S=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6 & 0.2 & 0.8\\ 0.5 & 0.8 & 0.9 & 1\\ 0.6 & 0.8 & 1 & 0.7\end{pmatrix}$$

$$R\cap S=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.1 & 0.1\\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0\\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6\end{pmatrix}$$

$$R^c=\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.9 & 0.2\\ 0.7 & 0.2 & 0.3 & 1\\ 0.9 & 0.2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}$$

(2) $(R\cup S)(x_1,y_3)=0.2,\quad (R\cap S)(x_3,y_4)=0.6,\quad R^c(x_2,y_1)=0.7.$

(3)

$$R^c_{0.8}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad (R\cap S)_{0.5}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. $1-1/e$, $1/e$.

3.

$$R^{(1)}\circ R^{(2)}=\begin{pmatrix}0.4&0.7&0.3&0.7\\0.3&1&0.5&0.8\\0.8&0.3&0.7&1\end{pmatrix}$$

$$(R^{(1)})^c\circ R^{(2)}=\begin{pmatrix}0.9&0.8&0.8&1\\0.8&0.5&0.7&1\\0.4&1&0.8&0.7\end{pmatrix}$$

$$(R^{(1)}\circ(R^{(2)})^c)_{0.7}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$(R^{(1)})_{0.7}\circ(R^{(2)})_{0.7}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&1&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

4.

$$R^{(1)}\circ R^{(2)}=\begin{pmatrix}0.6&0.3\\0.3&0.3\\0.8&0.3\\0.4&0.3\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{寒}\\\text{热}\\\text{虚}\\\text{实}\end{matrix}$$

肺　心

5. $(\underset{\sim}{R}^{(1)}\circ\underset{\sim}{R}^{(2)})(x,z)=e^{-k\left(\frac{x-z}{2}\right)^2}$

$((\underset{\sim}{R}^{(1)}\circ\underset{\sim}{R}^{(2)})^c)(x,z)=1-e^{-k\left(\frac{x-z}{2}\right)^2}$

8. $R^{(3)}$, $R^{(5)}$ 是自反的, $R^{(2)}$, $R^{(5)}$, $R^{(6)}$ 是对称的, $R^{(1)}$, $R^{(3)}$, $R^{(5)}$ 是可传递的.

9. 如

$$R=\begin{pmatrix}1&0.3&0.4\\0.3&1&0.3\\0.4&0.3&1\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}1&0.3&0.3\\0.3&1&0.4\\0.3&0.4&1\end{pmatrix}$$

是等价矩阵, 但 $R\cup Q$ 不是.

10. 可用 9 题中的 R, Q 说明.

11. $t(R)=\begin{pmatrix}1 & 0.6 & 0.6 & 0.8\\ 0.6 & 1 & 0.7 & 0.6\\ 0.6 & 0.7 & 1 & 0.6\\ 0.8 & 0.6 & 0.6 & 1\end{pmatrix}$

$\lambda=1$，分4类，{甲}，{乙}，{丙}，{丁}；$\lambda=0.8$，分3类．{甲，丁}，{乙}，{丙}；

$\lambda=0.7$，分2类，{甲，丁}，{乙，丙}；$\lambda=0.6$，分1类．{甲，乙，丙，丁}．

习　题　4

1. (1) $\{(0.3,[0.7,1],[0,0.7])^T,(0.3,[0.4,1],0.7)^T\}$．

   (2) $\{([0,0.3],0.3,[0,0.3],[0.7,1])^T,(0.3,[0,0.3],[0,0.3],[0.7,1])^T\}$．

   (3) $\{(0.3,[0,0.3],[0.7,1],0.4),([0,0.3],0.3,[0.7,1],0.4)\}$．

2. (1) $\begin{pmatrix}[0,0.5] & [0.6,1] & [0.4,0.5]\\ [0,0.3] & 0.5 & [0,0.3]\end{pmatrix}^T$

   $\begin{pmatrix}[0.4,0.5] & [0.6,1] & [0,0.5]\\ [0,0.3] & 0.5 & [0,0.3]\end{pmatrix}^T$

   (2) $\begin{pmatrix}[0.6,1] & [0.4,1] & [0,0.4]\\ 0.3 & [0.4,1] & [0,0.3]\end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix}[0.6,1] & [0.4,1] & [0,0.4]\\ [0,0.3] & [0.4,1] & 0.3\end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix}[0.6,1] & [0,1] & 0.4\\ 0.3 & [0.4,1] & [0,0.3]\end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix}[0.6,1] & [0,1] & 0.4\\ [0,0.3] & [0.4,1] & 0.3\end{pmatrix}$

   (3) 无解．

3. $\underset{\sim}{M}=(0.7,0.3,0.3,0.7,0.3,0.3,0.3,0.7,0.3,0.3)^T$

   $M_{0.7}=(1,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0)^T$

习 题 5

1. $(\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{Q})_U = (1, 1, 0.4, 0.9, 0.7)^T$

   $(\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{Q})_V = (0.7, 0.9, 0.3)$

   $\underset{\sim}{R}|_{v1} = (0.6, 0.8, 0.3, 0.5, 0.4)^T$

   $\underset{\sim}{R}|_{v2} = (0.5, 0.9, 0.4, 0.9, 0.5)^T$

   $\underset{\sim}{R}|_{v3} = (0,1, 0.2, 0.1, 0.3)^T$

2. (1) $\underset{\sim}{R}_X(x) = 1, \quad \underset{\sim}{R}_Y(y) = 1$

   (2) $\underset{\sim}{R}|_{x=0}(y) = \dfrac{1}{1+ky^2}, \quad \underset{\sim}{R}|_{y=0}(x) = \dfrac{1}{1+kx^2}$

   $\underset{\sim}{R}|_{x=1}(y) = \dfrac{1}{1+k(1-y)^2}, \quad \underset{\sim}{R}|_{y=1}(x) = \dfrac{1}{1+k(x-1)^2}$

3. $\underset{\sim}{R}_U = (1, 1, 1, 1, 1)^T \quad \underset{\sim}{R}_V = (1, 1, 1, 1, 1)$

   $\underset{\sim}{R}|_{v=1.7} = (0.1,0.2,0.8,1,0.8)^T$

   $\underset{\sim}{R}|_{v=60} = (0.2, 0.8, 1, 0.8, 0.2)$

5. （2）不成立，如1题中的R，Q；（5）不成立，如1题中的R.

6. (1) $\underset{\sim}{T}_R(A) = (1,1,0,0.1)$

   (2) $\underset{\sim}{T}_R(A) = (0.6, 1, 0.4, 0.5)$

7. $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}) = 1/a + 0.1/b + 0.9/c + 0/d$

   $\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B}) = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{0.1}{4} + \dfrac{0.1}{5} + \dfrac{0.9}{6}$

8. $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{A}_2) = (1, 1, 0), F(\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{A}_2) = (0.8, 0.5, 0)$

   $\underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{B}) = (0.8, 0.5, 0.5, 0.8, 0.8, 0.8)$

9. $\dfrac{0.3}{(2,2)} + \dfrac{0.3}{(2,4)} + \dfrac{0.6}{(4,2)} + \dfrac{0.4}{(4,4)} + \dfrac{0.8}{(5,2)} + \dfrac{0.4}{(5,4)}$

10. $\underset{\sim}{A}_1 + \underset{\sim}{A}_2 = \dfrac{0.2}{1} + \dfrac{0.3}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{0.3}{4} + \dfrac{0.2}{5} = 3$

习 题 6

1. $\underset{\sim}{A}(15.5) = 0.35$, $\underset{\sim}{A}(21.0) = 0.47$.

2. (1) $\underset{\sim}{A}(\text{快}) = \frac{0.262}{10} + \frac{0.681}{11} + \frac{0.816}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}$

$$\underset{\sim}{B}(\text{中}) = \frac{0.047}{4} + \frac{0.594}{5} + \frac{0.997}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{0.738}{10} + \frac{0.319}{11} + \frac{0.184}{12}$$

$$\underset{\sim}{C}(\text{慢}) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.953}{4} + \frac{0.406}{5} + \frac{0.003}{6}$$

(2)、(3) 略.

习 题 7

1. $t(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.8 \\ 0.5 & 1 & 0.7 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 & 1 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, 聚类图略.

2. 3类 $\{72, 74, 78\}$, $\{73, 75, 76\}$, $\{77\}$.

3. 轻.

4. $\lambda = 1$, 4类 $\{u_1\}$, $\{u_2\}$, $\{u_3\}$, $\{u_4\}$;

$\lambda = 0.8$, 3类 $\{u_1\}$, $\{u_2, u_3\}$, $\{u_4\}$;

$\lambda = 0.717$, 2类 $\{u_1\}$, $\{u_2, u_3, u_4\}$;

$\lambda = 0.401$, 1类 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

5. 3类 $\{x_1, x_3, x_4\}$, $\{x_2, x_6\}$, $\{x_5\}$.

6. 3类 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $\{x_7, x_8, x_9\}$, $\{x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}\}$.

习 题 8

1. 属二级水.

2. 属一般三角形.

3. (1) 属高肥丰产; (2) 属早熟型.

4. 与 $\underset{\sim}{A}_3$ 最接近.

习 题 9

1. $x^* = \dfrac{(a_1\sigma_2 - a_2\sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)}$

2. $z^* = \dfrac{(\sqrt{5} - 3)}{2}$

3. $x^* = (402.5, 158.75)^T, z^* = 3293,75$

4. (1) $x^* = \left(\dfrac{55}{6}, \dfrac{11}{2}, 0\right)^T$

   (2) $x^* = (0, 411.413, 0)^T$

5. (1) $x^* = (3, 3, 0)^T$

   (2) $x^* = (\dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{5}, 0)^T$

   (3) $x^* = (0, \dfrac{35}{8}, 0)^T$

6. $x^* = (10.26, 3.7)^T, z_1^* = 24.22, z_2^* = 23.38$

7. $x^* = (11.29, 24.47)^T, z_1^* = 27.28, z_2^* = 24.47$

习 题 10

1. $E(x) = 0.8 > 0.6$,降水量大.

2. 买 1 号衣服.

习 题 11

1. 排序均为 x_1, x_2, x_3.

2. 南宁不适宜, 万宁适宜.

3. 次序均为 c, a, b.

4. 顺序为 u_1, u_2, u_3.

5. $A \circ R = \{0.4, 0.5, 0.2, 0.1\}$,该教师教学效果好.

6. 分别属Ⅱ级, Ⅲ级.

7. 属二级.

习 题 12

1. $B^{*} = (0.36, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$.

2. $\underset{\sim}{B}_{1} = \frac{0.8}{b_1} + \frac{0.8}{b_2} + \frac{0.4}{b_3} + \frac{0}{b_4}$

3. $R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 1 & 0.5 & 0.1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}^{T}$

4.

观 察 量	−3	−2	−1	0	1	2	3
控 制 量	3	2	1	0	−1	−2	−3

(0, 0, 0.2, 0.2, 0.5, 0.5, 0.5), {2}.

习 题 13

1. 设论域$\Omega=\{1, 2, 3, \cdots\}$为发现目标所需搜索次数，则 $\underset{\sim}{A}$ 发生的概率为

$$P(\underset{\sim}{A}) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}(i)P_i$$

$$= P + 0.8P(1-P) + 0.6P(1-P)^2 + 0.4P(1-P)^3$$

2. $P(\underset{\sim}{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2k^2}} dx$

$$= \frac{k}{\sqrt{k^2+\sigma^2}} e^{-\frac{(\mu-b)^2}{2(k^2+\sigma^2)}}$$

3. 设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 分别表示青年、老年模糊集，$P(\underset{\sim}{A}) = 6.7\%$，$P(\underset{\sim}{B}) = 17.5\%$

4. (0.6“很可能” +0.4“很不可能”) P

$$= \text{“很可能”}\left(\frac{P-0.4}{0.6-0.4}\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & 0.4 \leqslant P < 0.54 \\ 2\left(\frac{P-0.54}{0.06}\right)^2, & 0.54 \leqslant P < 0.57 \\ 1-\left(\frac{P-0.6}{0.06}\right)^2, & 0.57 \leqslant P \leqslant 1 \end{cases}$$

5. $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{A}) = \pi_{w_1} \underset{\sim}{A}(w_1) + \pi_{w_2} \underset{\sim}{A}(w_2) + \pi_{w_3} \underset{\sim}{A}(w_3)$

$$= \frac{0.4}{0.86} + \frac{0.4}{0.9} + \frac{0.5}{0.93} + \frac{1}{0.89} + \frac{0.5}{0.92} + \frac{0.5}{0.88} + \frac{0.6}{0.85}$$

="接近 0.89"

名 词 索 引

（按汉语拼音顺序排列）

B

本质模糊集 ······ 125
表现定理 ······ 28
闭模糊集 ······ 115
闭模糊数 ······ 115

C

传递闭包 ······ 64

D

倒逆关系 ······ 51
真基图 ······ 71
点-集映射 ······ 352
对称闭包 ······ 58

F

非本质模糊集 ······ 125
分解定理 ······ 25
复合模糊关系 ······ 52
负距离 ······ 43
负模糊数 ······ 115

H

行简化系数矩阵 ······ 88
核 ······ 22
划分 ······ 362

J

简化系数矩阵 ······ 90
截影 ······ 101
集合变换 ······ 353
集合套 ······ 27
竞赛矩阵 ······ 242
基数 ······ 31
聚类中心向量 ······ 155

K

扩张原理 ······ 106

L

λ-截关系 ······ 52
λ-截集 ······ 19
λ-截矩阵 ······ 62
λ-截图 ······ 72
量化因子 ······ 311
两模糊集的距离 ······ 40
两模糊集的贴近度 ······ 44
隶属度 ······ 4
隶属函数 ······ 4
论域 ······ 346

M

满意性准则 ······ 237

幂集 ………………………………… 7
模糊变换 ……………………… 104
模糊 c-划分 …………………… 161
模糊传递关系 ………………… 52
模糊传递矩阵 ………………… 64
模糊度 ………………………… 36
模糊对称关系 ………………… 51
模糊对称矩阵 ………………… 58
模糊等价关系 ………………… 54
模糊等价矩阵 ………………… 65
模糊二阶决策 ………………… 260
模糊规划 ……………………… 193
模糊概念 ………………………… 4
模糊关系 ……………………… 49
模糊关系方程 ………………… 78
模糊分布 ……………………… 135
模糊集 …………………………… 3
模糊集的高 …………………… 31
模糊集的深度 ………………… 31
模糊极大值 …………………… 189
模糊决策 ……………………… 237
模糊矩阵 ……………………… 54
模糊控制器 …………………… 289
模糊含度 ……………………… 96
模糊含度方程 ………………… 97
模糊化算子 …………………… 270
模糊幂集 ………………………… 7
模糊命题 ……………………… 276
模糊判决 ……………………… 194
模糊群体决策 ………………… 239
模糊熵 ………………………… 39
模糊事件的方差 ……………… 332
模糊事件的均值 ……………… 332
模糊事件的模糊概率 ………… 343
模糊事件的普通概率 ………… 328
模糊数 ………………………… 113
模糊算子 ……………………… 17
模糊图 ………………………… 70
模糊推理 ……………………… 276
模糊推理句 …………………… 277
模糊相似关系 ………………… 54
模糊相似矩阵 ………………… 68
模糊线性规划 ………………… 199
模糊性 …………………………… 1
模糊性现象 ……………………… 1
模糊系统 ……………………… 289
模糊映射 ……………………… 102
模糊约束集 …………………… 200
模糊直积 ……………………… 109
模糊自反关系 ………………… 52
模糊自反矩阵 ………………… 58
模糊综合决策 ………………… 251

N

拟合度 ………………………… 228

P

判定化算子 …………………… 272
偏序关系 ……………………… 363
评判函数 ……………………… 260
评判矩阵 ……………………… 261
评判空间 ……………………… 260
普通事件的模糊概率 ………… 334

Q

全序关系 ……………………… 364

区间数 …… 113

S

三角模糊数 …… 119
生成树 …… 72
伸缩指标 …… 201
树 …… 367
似然推理 …… 284

T

特征函数 …… 353
条件模糊极大值 …… 192
条件模糊优越集 …… 192
贴近度 …… 44
投影 …… 101
凸模糊集 …… 114

X

相对基数 …… 33
相似系数 …… 149
相及矩阵 …… 247
信任度 …… 128
修改系数矩阵 …… 90
系统模糊度 …… 120
线性序 …… 240

Y

硬 c-均值算法 …… 162
有界闭模糊数 …… 115
预测空间 …… 221
语言算子 …… 269
语言变量 …… 275
语言概率场 …… 340
语言值 …… 273

Z

择近原则 …… 178
正规模糊集 …… 22
正距离 …… 43
正模糊数 …… 115
支集 …… 22
直接聚类法 …… 148
置信水平 …… 19
状态空间 …… 221
逐次平方法 …… 69
自反闭包 …… 58
自组织模糊控制器 …… 312
综合评判变换矩阵 …… 252
最大隶属原则 …… 176
最大生成树 …… 72
最优性准则 …… 237

参 考 文 献

1 汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海：上海科学技术出版社，1983
2 罗承忠. 模糊集引论. 北京：北京师范大学出版社，1989
3 张俊福等. 应用模糊数学. 北京：地质出版社，1988
4 吴望名等. 应用模糊集方法. 北京：北京师范大学出版社，1985
5 贺仲雄. 模糊数学及其应用. 天津：天津科学技术出版社，1983
6 楼世博等. 模糊数学. 北京：科学出版社，1983
7 汪培庄，韩立岩. 应用模糊数学. 北京：北京经济学院出版社，1989
8 ［日］水本雅晴. 模糊数学及其应用. 北京：科学出版社，1986
9 冯保成. 模糊数学实用集粹. 北京：中国建筑工业出版社，1991
10 ［法］D. 杜布瓦，H. 普哈德. 江苏省模糊数学专业委员会译，模糊集与模糊系统——理论和应用. 南京：江苏科学技术出版社，1989
11 邹开其，徐扬. 模糊系统与专家系统. 西南交通大学出版社，1989
12 张南纶. 随机现象的从属特性与概率特性. 武汉建材学院学报，1981（1）
13 吴震. 气象预报中 Fuzzy 聚类分析. 模糊数学 1983（3）
14 朱政嘉. 模糊 K-均值聚类法及其在地质学中的应用. 长春地质学院学报，1982（3）
15 李安贵等. 应用 Fuzzy 聚类分析对地下水位动态分类. 水文地质工程地质 1993（4）
16 刘来福. 模糊数学在小麦亲本识别中的应用. 北京师范大学学报，1979（3），
17 陶振宇，彭祖赠. 岩体工程分类的模糊数学方法. 武汉水利电力学院. 1983 年 1 月
18 邵寿颐、陈化成. Fuzzy 集理论在条码识别中的应用. 模糊数学，1982（1），
19 李安贵. 多元模糊模式识别在钢中碳化物评级中的应用. 北京科技大学学报，1994（2）
20 张志宏，李安贵. 模糊线性规划的最优值. 模糊系统与数学，1992（6）增刊
21 张志宏，李安贵. 一类模糊线性规划问题的最优解分析. 系统工程. 1993（11）增刊
22 Research and Statistics Department of Minister's, Secretariat. Ministry of International Trade and Industry . Census of commerce in 1976, Printing Bureau (1977), in Japanese
23 李安贵，贺鹏来. 一个评价信息系统总体规划的 Fuzzy 模型. 系统工程学报 2（1990）
24 朱剑英. Fuzzy 控制技术应用于机床控制. 南京航空学院学报（英文版）（1982）

25　胡家耀等. 模糊控制在退火炉燃烧过程中的应用. 自动化学报. 1989(6):15
26　李洪兴等. 模糊数学——方法及应用. 天津：天津科学技术出版社,1993
27　李士勇. 模糊控制. 神经控制和智能控制论. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1998
28　杨纶标等. 模糊数学原理及应用. 广州:华南理工大学出版社,2003
29　宋晓秋. 模糊数学原理与方法(第二版). 北京:中国矿业大学出版社,2004
30　刘立柱. 概率与模糊信息论及其应用. 北京:国防工业出版社,2004
31　胡宝清. 模糊理论基础. 武汉:武汉大学出版社,2004
32　吕恩琳,钟佑明. 模糊概率随机变量. 应用数学和力学,2003(4)